5167CH07

باب 7

ذرات کے نظام اور گردشی حرکت
(SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION)

7.1 تعارف (Introduction)

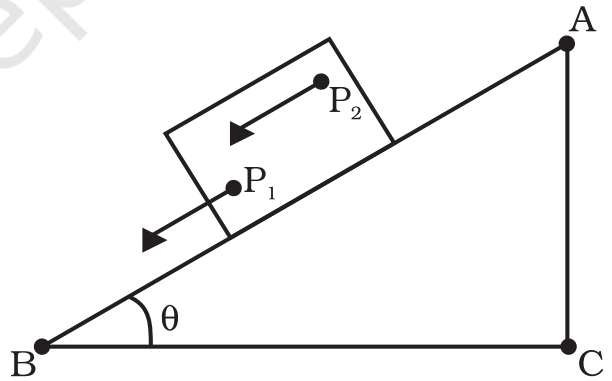
پچھلے ابواب میں ہم نے بنیادی طور پر ایک واحد ذرّہ کی حرکت کے بارے میں مطالعہ کیا تھا۔(ذرہ کو' کامل طور پر' نقطہ کمیت سے ظاہر کرتے ہیں، جس کا کوئی سائز نہیں ہوتا)۔اس مطالعہ سے حاصل نتیجہ کو ہم نے متناہی سائز کے اجسام کی حرکت میں یہ مانتے ہوئے لاگو کیا تھا کہ اس طرح کے اجسام کی حرکت کو ہم ذرّہ کی حرکت کی شکل میں بیان کرسکتے ہیں۔

روز مرہ کی زندگی میں جتنی بھی اشیا ہمارے رابطے میں آتی ہیں سب کا ایک متناہی سائز ہوتا ہے۔متناہی جسم کی حرکت کے مطالعہ میں اکثر ذرّہ کا مثالی نمونہ غیر موزوں ثابت ہوا ہے۔ اس باب میں ہم اس غیر موزوں مفروضے سے باہر آنا چاہتے ہیں۔ ہمیں ان توسیعی (متناہی سائز کے) اجسام کی حرکت کو سمجھنے کی کوشش کرنا ہوگی۔ یہی متناہی سائز کے اجسام دراصل ذرات کے نظام ہیں۔ہمیں اپنا مطالعہ پورے نظام کی حرکت سے شروع کرنا چاہیے۔ ذرات کے نظام کا کمیت مرکز (Centre of mass) یہاں ایک کلیدی تصور ہے۔اب ان اجسام کی حرکت کے مطالعہ کے لیے ہمیں ذرات کے نظام کے کمیت مرکز کی حرکت سے بحث کرنا ہوگی اور متناہی سائز کے اجسام کی حرکت کے مطالعے میں اس تصور کی افادیت کو سمجھنا ہوگا۔

متناہی سائز کے اجسام کی حرکت سے متعلق بہت سارے مسائل انھیں استوار جسم مان کر حل کیے جاسکتے ہیں۔ ایک مثالی استوار جسم وہ جسم ہے جس کی کامل طور پر متعین اور نہ تبدیل ہوسکنے والی شکل ہوتی ہے۔ ایسے جسم کے ذرات کے مختلف جوڑوں کے درمیانی فاصلے تبدیل نہیں ہوتے۔ استوار جسم کی اس تعریف سے واضح ہوجاتا ہے کہ کوئی حقیقی جسم کبھی بھی مکمل طور پر استوار جسم نہیں ہوسکتا۔ کیونکہ حقیقی اجسام کی شکلوں میں بیرونی قوت کے زیرِ اثر تخریب ہوجاتی ہے۔ لیکن بہت سی

صورتوں میں یہ تخریب نظر انداز کی جاسکتی ہے۔ اس لیے بہت سی ایسی صورتوں میں ، جن میں پہیے، لٹو، فولادی چھڑیں، مالیکیول اور سیارے وغیرہ جیسی اشیاء شامل ہوں ہم اجسام کا اینٹھنا (شکل کا بگڑ جانا)، مڑ جانا یا ارتعاش کرنا نظرانداز کر سکتے ہیں اور انھیں استوار جسم مان سکتے ہیں۔

7.1.1 ایک استوار جسم میں کس طرح کی حرکت ہوتی ہے؟

اب ہم اس سوال کے جواب کے لیے استوار جسم کی حرکت کی کچھ مثالیں لیتے ہیں۔ ہم سب سے پہلے ایک مستطیل نما بلاک لیتے ہیں جو نیچے کی طرف ایک ڈھلواں سطح پر بغیر دائیں بائیں حرکت کیے، پھسل رہا ہے۔ یہ بلاک استوار جسم ہے۔ مستوی پر، نیچے کی جانب' اس کی حرکت اس طرح ہے کہ جسم کے تمام ذرات ایک ساتھ حرکت کر رہے ہیں، یعنی کہ کسی بھی ساعت پر ہر ذرّے کی رفتار یکساں ہے۔ یہ استوار جسم خالص خطی انتقالی (Translational) حرکت کی مثال ہے (شکل 7.1)۔

شکل 7.1 مائل مستوی سے نیچے آتے بلاک کی انتقالی خطی حرکت (کوئی بھی نقطہ جیسے P_1 یا P_2 کسی بھی وقت ایک ہی رفتار سے حرکت کر رہا ہے)

خطی انتقالی حرکت میں جسم کا ہر ذرّہ کسی بھی ساعت پر یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔

اب اگر ہم دھات یا لکڑی کے ٹھوس استوانے کو مائل مستوی پر نیچے کی طرف لڑھکائیں (شکل 7.2)، اس صورت میں یہ استوار جسم یعنی کہ استوانہ، مائل مستوی کی چوٹی سے' اس کے پیندے پر منتقل ہو جاتا ہے اور اس لیے استوانہ کی حرکت ایک خطّی انتقالی حرکت معلوم ہوتی ہے۔ مگر شکل 7.2 کے مطابق ایک دی ہوئی ساعت پر ہر ذرّہ کی رفتار یکساں نہیں ہے۔ اس لیے یہ جسم خالص خطّی انتقالی حرکت میں نہیں کہا جائے گا۔ اس حرکت میں خطّی انتقال کے علاوہ اور بھی کچھ ہے۔

شکل 7.2 ایک استوانہ کی لڑھکن حرکت۔ یہ خالص خطّی انتقالی نہیں ہے۔ نقاط P_1، P_2، P_3 اور P_4 کی ایک ساعت پر، یکساں رفتار نہیں ہے۔ (جسے تیر کے نشانوں سے دکھایا گیا ہے)۔ درحقیقت لمس نقطہ P_3 پر کسی بھی ساعت پر رفتار صفر ہے، اگر بیلن بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔

اب یہ سمجھنے کے لیے کہ یہ ''اور بھی کچھ'' کیا ہے ہم ایک ایسا استواری جسم لیتے ہیں جس کے حرکت کرنے پر یہ پابندی عائد کردی گئی ہے کہ اس کی حرکت خطّی انتقالی حرکت نہ ہو۔ ایک استوار جسم پر یہ پابندی، کہ اس کی حرکت خطّی انتقالی حرکت نہ ہو، عائد کرنے کا ایک سب سے عام طریقہ یہ ہے کہ اسے ایک خطِ مستقیم سے جڑ دیا جائے۔ اب ایسا استوار جسم صرف گردشی حرکت ہی کرسکتا ہے۔ وہ خط یا جامد محور جس کے گرد جسم گردشی حرکت کرتا ہے، گردش کا محور (Axis of rotation) کہلاتا ہے۔

اگر آپ اپنے چاروں طرف دیکھیں تو محور کے گرد گردش کی مثالیں دیکھ سکتے ہیں جیسے چھت سے لٹکا ہوا پنکھا، کمہار کا چاک، بڑا پہیہ، چرخ وغیرہ (شکل 7.3 (a) اور 7.3 (b)۔

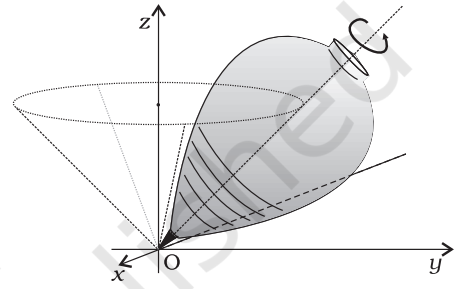
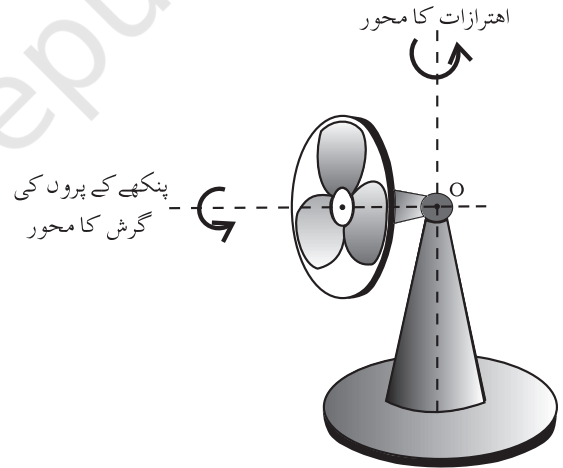
شکل **7.3** متعین محور کے گرد گردشی حرکت

(a) چھت سے لٹکا ہوا پنکھا

(b) کمہار کا چاك

شکل **7.4** ایك متعین محور کے گرد گردشی حرکت دکھاتا ھے۔ مانا P_1 ذرّہ متعین گردشی محورسے r_1 دوری پر ھے۔ذرّہ P_1 یہ بتاتا ھے کہ دائرہ کا نصف قطر r_1 اوراسکا مرکز c_1 ھے ۔یہ بھی دائرہ محور کے عمودی سمت میں واقع ھے۔یہ نوٹ کریں کہ ذرہ p_1 اور p_2 الگ الگ سطح مگرمحور کے عمودی سمت میں ھیں۔ کسی ذرّہ سے p_3 کے لیے اگر $r=0$ ھے۔

اب ہم یہ سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں کہ ''گردش'' ہے کیا۔گردش کی خاصیتیں کیسے متعین ہوتی ہیں؟ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایک متعین محور کے گرد استواری جسم کی گردشی حرکت کے دوران جسم کا ہر ذرہ ایک دائرہ میں گھومتا ہے اور یہ دائرہ ایسے متسوی میں ہوتا ہے جو محور پر عمود ہے اور اس دائرہ کا مرکز محور پر ہوتا ہے۔شکل 7.4 میں ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردشی حرکت دکھائی گئی ہے ۔(حوالہ فریم کے z – محور کے گرد) مانا P_1 استوار جسم کا ایک ذرہ ہے جو متعین محور سے r_1 دوری پر ہے۔ذرّہ P_1 ایک دائرہ بناتا ہے جس کا نصف قطر r_1 اور مرکز c_1 ہے ۔یہ دائرہ محور کے عمودی مستوی میں واقع ہے۔شکل میں استوارِ جسم کا دوسرا ذرّہ P_2 بھی دکھایا گیا ہے، جامد P_2

محور سے r_2 فاصلہ پر ہے۔ یہ ذرّہ P_2 نصف قطر r_2 کے دائرہ میں حرکت کرتا ہے، جس کا مرکز، محور پر، C_2 ہے۔ یہ دائرہ بھی محور پر عمود مستوی میں ہوتا ہے۔ یہ نوٹ کریں کہ ذرّے P_1 اور P_2 الگ الگ مستوی میں ہو سکتے ہیں، مگر دونوں مستوی جامد محور پر عمود ہیں۔ کسی ذرّہ p_3 کے لیے اگر $r=0$ ہے تو یہ ذرّہ جسم کی گردشی حرکت کے دوران حالت سکون میں ہوگا۔ یہ اس لیے امید کی جاتی ہے کیونکہ محور جامد ہے۔

شکل (a) 7.5 گھومتا ہوا لٹو (لٹو زمین کے ساتھ نقطہ لمس، لٹور کی نوٹ O، پر جامد ھے)

شکل (b) 7.5 اهتراز کرتا هوا میٹر کا پنکھامع گردشی پر۔ پنکھے کی دهوری نقطه O جامد هے۔ پنکھے کے پر گردشی حرکت کر رهے هیں۔ جبکه پنکھے کے پروں کا گردشی محور اهترازی حرکت کر رها هے ۔

کچھ گردش کی مثالوں میں محور جامد نہیں بھی ہو سکتا ہے۔ گھومتا ہوا لٹو اس کی ایک مثال ہے (شکل (a) 7.5)۔ اس میں ہم یہ مانتے ہیں کہ لٹو ایک مقام سے دوسرے مقام پر پھسلتا اور اس لیے خطی انتقالی حرکت نہیں ہے ہم اپنے تجربے سے جانتے ہیں کہ ایسے گھومتے ہوئے لٹو کا محور، اس کے زمین سے نقطہ تماس (point of contact) سے گذرتے ہوئے عمودی خط کے گرد گھومتا ہے اور ایک مخروط (cone) رقبہ طے کرتا ہے، جیسا کہ شکل (a) 7.5 میں دکھایا گیا ہے۔ (لٹو کے محور کی عمودی خط کے گرد یہ حرکت ''جھومتا'' یا جھوم (precession) کہلاتی ہے)۔ نوٹ کریں کہ زمین کے ساتھ لٹو کا نقطہ تماس جامد ہے۔ کسی بھی ساکتِ وقت پر لٹو کا گردشی محور نقطہ تماس سے گذرتا ہے۔ اس قسم کی حرکت کی دوسری آسان مثال اہتزاز کرتا ہوا ٹیبل پنکھا ہے۔ یہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اہتزازی حالت میں پنکھے کا گردشی محور افقی مستوی میں اس عمود خط کا گرد اہتزازی شکل (اِدھر اُدھر) حرکت کرتا ہے جو اس نقطہ سے گذر رہا ہے جس پر محور جڑا ہوا ہے۔ (شکل (b) 7.5 میں نقطہ O)۔

جب پنکھا گردش میں کرتا ہے اور اسکا محور ادھر ادھر گھومتا ہے جب بھی یہ نقطہ متعین (جامد) ہوتا ہے۔ اس طرح گردشی حرکت کی زیادہ عمومی صورتوں میں، جیسے ایک لٹو یا کی مثال میں استواری جسم کا ایک نقطہ نہ کہ خط جامد ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں محور جامد نہیں ہوتا لیکن یہ ہمیشہ ایک جامد نقطے سے گذرتا ہے۔ لیکن ہم اپنے مطالعے میں وہ مخصوص صورتیں ہی شامل کریں گے جن میں ایک خط (یعنی کہ محور) جامد ہے۔ اس لیے ہمارے لیے گردش صرف ایک جامد محور کے برخلاف وضاحت نہ کی جائے۔

شکل (a) 7.6 ایک استوارِ جسم کی ایسی حرکت جو خالص خطّی انتقالی ھے

شکل (b) 7.6 ایک استوارِ جسم کی ایسی حرکت جو خطی انتقالی حرکت اور گردشی حرکت کا مجموعه ھے۔

شکل (a)7.6 اور (b) 7.6 میں ایک ہی جسم کی مختلف حرکتیں دکھائی گئی ہیں۔ نوٹ کریں کہ نقطہ P جسم کا کوئی بھی اختیاری طور پر منتخب کیا گیا نقطہ ہے، O جسم کا کمیت مرکز ہے، جس کی تعریف اگلے حصے میں کی گئی ہے۔ یہاں یہ کہہ دینا مناسب ہے کہ O کے خطوطِ حرکت، جسم کے خطی انتقالی خطوطِ حرکت Tr_1 اور Tr_2 ہیں۔ تین مختلف لمحاتِ وقت پر، O اور P کے مقامات، دونوں شکلوں [7.6 (a), 7.6 (b)] میں، بالترتیب نقاط O_1، O_2 اور سے دکھائے گئے ہیں۔ جیسا کہ شکل (a) 7.6 سے دیکھا جاسکتا ہے، کسی بھی لمحہ وقت پر جسم کے کسی بھی ذرّے، جیسے O یا P، کی رفتاریں، خالص خطی انتقالی میں یکساں ہوتی ہیں۔ نوٹ کریں کہ اس صورت میں OP کی تشریق (orientation)، یعنی کہ ایک متعین سمت، جسے افقی خط، سے OP جو زاویہ بناتا ہے وہ یکساں رہتا ہے۔ یعنی کہ : $[\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3]$ شکل (b) 7.6 میں خطی انتقالی اور گردشی حرکتوں کے مجموعے کی صورت دکھائی گئی ہے۔ اس صورت میں، کسی بھی لمحہ وقت پر، O اور P کی رفتاریں مختلف ہوتی ہیں۔ مزید یہ کہ α_1، α_2، α_3 تینوں مختلف ہوسکتے ہیں۔

ایک ڈھلواں سطح پر استوانے کی لڑھکن حرکت میں ایک متعین (جامد) محور نقطہ کے گرد گردش اور انتقالی خطی حرکت دونوں حرکتیں شامل ہیں۔

اس لحاظ سے شکل (a)7.6 اور شکل (b)7.6 دونوں اس تصور کو سمجھنے میں آپ کے لیے مددگار ہوں گی۔ ان دونوں شکلوں میں ایک ہی جسم کی مماثل خطی انتقالی خطوطِ راہ (identical translational trajectories) پر حرکت دکھائی گئی ہے۔ ایک صورت میں، [شکل (a) 7.6]، حرکت خالص خطی انتقالی ہے، اور دوسری صورت میں [شکل (b) 7.6] حرکت خطی انتقالی حرکت اور گردشی حرکت کا مجموعہ ہے۔ [آپ ایک کسی اور استوار جسم، جیسے کتاب، میں ان دونوں طرح کی حرکتوں کو پیدا کرنے کی کوشش کرسکتے ہیں۔]

اب ہم اس حصہ کے اہم ترین نقات دہراتے ہیں: ایسا استواری جسم جو کسی طور پر جڑا ہوا یا جامد نہ ہو، اس کی حرکت یا تو خالص خطی انتقالی ہوتی ہے یا خطی انتقالی اور گردشی حرکتوں کا مجموعہ ہوتی ہے۔ جب کہ استواری جسم اگر کسی طور پر جڑا ہوا یا جامد ہو تو اس کی حرکت گردشی ہوتی ہے۔ حرکت کسی ایسے محور کی گرد ہوسکتی ہے جو جامد ہو (مثلاً چھت کا پنکھا) یا حرکت کررہا ہو (مثلاً اہتزازی میز پنکھا)۔ ہم اس باب میں صرف جامد محور کے گرد گردش کا ہی مطالعہ کریں گے۔

7.2 مرکز کمیت (CENTRE OF MASS)

ہم سب سے پہلے یہ سمجھنے کی کوشش کریں گے کہ ایک ذرّات کے نظام کا مرکز کمیت ہے کیا اور پھر اس کی اہمیت سے بحث کریں گے۔ آسانی کے لیے ہم دو ذرّوں کے نظام سے شروع کرتے ہیں۔ دونوں ذرّوں کو ملانے والے خط کو ہم x- محور مانتے ہیں۔

شکل 7.7

مانا کہ دونوں ذرّات کی کسی مبدا نقطہ O سے، دوریاں بالترتیب، x_1 اور x_2 ہیں۔ مانا m_1 اور m_2، بالترتیب، ان کی کمیتیں ہیں۔ نظام کا مرکز کمیت نقطہ C پر مبدا نقطہ O سے X دوری پر واقع ہے۔

جہاں X کی قدر دی جاتی ہے:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (7.1)$$

مساوات (7.1) میں x کو ہم x_1 اور x_2 کا کمیت وزنیاتی اوسط (Mass

weighted mean) کہہ سکتے ہیں۔اگر دونوں ذرّات کی کمیت یکساں ہوتو

$$m_1 = m_2 = m$$

$$X = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

اس لیے مساوی کمیت کے ذرّات کے لیے مرکز کمیت ان دونوں کے بالکل وسط میں ہوگا۔

اگر n ذرّات ہوں جن کی بالترتیب کمیتیں m_1، m_2، ------m_n ہوں اور جو ایک ہی خط مستقیم پر ہوں، جسے x-محور لیا گیا ہے، تو ذرات کے نظام کے کمیت مرکز کی تعریف ہوگی۔

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i} \quad (7.2)$$

جہاں x_1، ------x_2، x_n ذرّات کی نقطہ O سے دوریاں ہیں۔ اور x بھی اسی مبدے سے ناپا گیا ہے۔علامت $\sum$ (یونانی لفظ سِگما) حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے، اس مثال میں یہ جمع n ذرات پر ہے۔

یہ حاصل جمع: $\sum m_i = M$

نظام کی کل کمیت ہے۔

فرض کیجیے ہمارے پاس تین ذرّات ہیں جو کہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں۔ہم اس مستوی میں جس میں وہ ذرّہ واقع ہے x-محور اور y-محور کو معرف کر سکتے ہیں اور ان کی نسبت سے تینوں ذرّات کے مقام کو بالترتیب کو آرڈی نیٹوں (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ مانا کہ کمیتیں بالترتیب m_1، m_2 اور m_3 ہیں۔یہاں اس تین ذرات کے نظام کے مرکز کمیت C کی تعریف، جو کوآرڈی نیٹوں (x, y) پر واقع ہے، اس طرح کی جاتی ہے:

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (7.3\ a)$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (7.3\ b)$$

یکساں وزن کے ذرّات کے لیے: $m_1 = m_2 = m_3 = m$

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (7.3\ a)$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (7.3\ b)$$

اس لیے، اگر تینوں ذرّات کی کمیتیں یکساں ہوں تو مرکز کمیت ذرات کے ذریعہ بنائے گئے مثلث کے وسطی مرکز (centroid) پر واقع ہوتا ہے۔

مساوات (7.3 a) اور (7.3 b) سے ہم n ذرّات، جو ایک ہی مستوی میں نہ ہوں بلکہ فضا میں پھیلے ہوئے ہوں، کے لیے بھی عمومی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔اس طرح کے نظام کا مرکز کمیت (x, y, z) پر ہوگا، جہاں!

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad (7.4\ a)$$

$$y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad (7.4\ b)$$

اور

$$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (7.4\ c)$$

یہاں $M = \sum m_i$ نظام کی کل کمیت ہے۔اشاریہ i کی قیمت 1 سے n تک ہے، m_i، i^{th} ذرّہ کی کمیت ہے اور i^{th} ذرّہ کا مقام (x_i, y_i, z_i) ہے۔

مساوات (7.4 a)، (7.4 b) اور (7.4 c) کو ہم ایک ہی مساوات میں مقام سمتیہ کے ذریعہ دکھا سکتے ہیں۔ مانا r_i، ith ذرے کا مقام سمتیہ ہے اور R کمیت مرکز کا مقام سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\hat{\mathbf{i}} + y_i\,\hat{\mathbf{j}} + z_i\,\hat{\mathbf{k}}$$

اور

$$\mathbf{R} = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}$$

تب

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{M} \quad (7.4\ d)$$

دائیں ہاتھ کی طرف حاصل جمع سمتیہ حاصل جمع ہے۔

نوٹ کریں کہ سمتیوں کے استعمال سے ہمیں کتنی مختصر ریاضیاتی عبارت حاصل ہوتی ہے۔ اگر حوالہ جاتی فریم (کوآرڈی نیٹ نظام) کے مبدے کو کمیت مرکز منتخب کرلیا جائے تو دیے ہوئے ذرات کے نظام کے لیے:

$$\sum m_i r_i = O$$

ایک استوار جسم جیسے میٹر چھڑ یا پرداری پہیہ ذرّات کا نظام ہوتا ہے۔ اس لیے مساوات (7.4 a)، (7.4 b)، (7.4 c) اور (7.4 d) کو استوار جسم کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طرح کے جسم میں ذرّات کی تعداد (ایٹم یا مالیکیول) اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ انفرادی ذرّہ کے لیے مساوات کا استعمال کر کے حاصل جمع نکالنا مشکل کام ہے۔ چونکہ ذرّات کی درمیان کی جگہ بہت ہی کم ہے اس لیے اس طرح کے جسم کو ہم کمیت کے لگاتار پھیلاؤ والا جسم مان سکتے ہیں۔ جسم کو n کمیت اجزا (Mass elements) میں بانٹا جاتا ہے۔ کمیت Δm_1، Δm_2 --------- Δm_n اور i^{th} جز کی کمیت Δm_i ہے جو نقطہ (x_i, y_i, z_i) کے گرد واقع ہے۔ پھر مرکز کمیت کے کوآرڈی نیٹ (نزدیکی طور پر) اس طرح ہوں گے:

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

جیسے جیسے n زیادہ ہوتا جائے گا اور Δm_i کم ہوتا جائیگا یہ مساواتیں زیادہ درست نتیجہ دیں گے۔ اس حالت میں ہم i کمیتوں کا حاصل جمع تکملہ (انٹگرل) کے ذریعہ لکھ سکتے ہیں

$$\sum \Delta m_i \to \int dm = M,$$

$$\sum (\Delta m_i)x_i \to \int x\, dm,$$

$$\sum (\Delta m_i)y_i \to \int y\, dm,$$

اور

$$\sum (\Delta m_i)z_i \to \int z\, dm$$

یہاں M جسم کی کل کمیت ہے۔ مرکز کمیت کے کوآرڈی نیٹس اب ہوں گے:

$$x = \frac{1}{M}\int x dm \text{، } y = \frac{1}{M}\int y dm \text{ اور } z = \frac{1}{M}\int z dm \quad (7.5\text{a})$$

ان تینوں عددیہ عبارتوں کی مطابق سمیتہ عبارت ہے:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \qquad (7.5\text{ b})$$

اگر ہم مرکز کمیت کو اپنے محوری نظام کا مبدا نقطہ O مان لیں تو

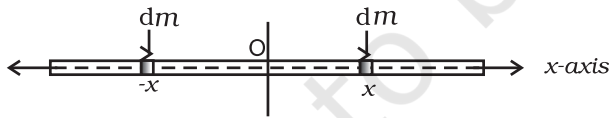
$$\mathbf{R}\ (x,y,z) = \mathbf{0}$$

اس لیے

$$\int \mathbf{r}\, dm = \mathbf{0}$$

یا

$$\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0 \qquad (7.6)$$

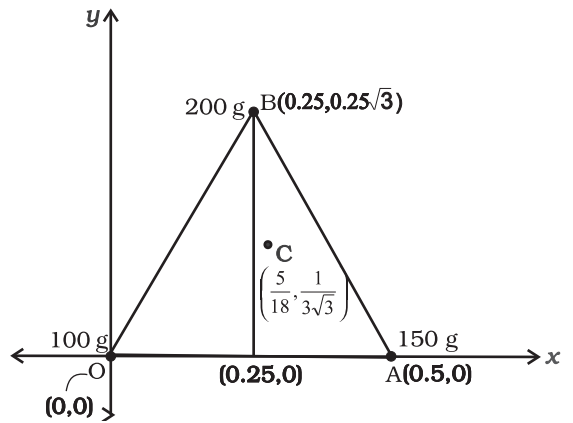
اکثر ہمیں باقاعدہ شکل والے متجانس اجسام کے کمیت مراکز معلوم کرنے ہوتے ہیں۔ جیسے رِنگ (چھلّہ)، ڈسک، (قرص)، کرہ، چھڑ وغیرہ (متجانس جسم کا مطلب ہے وہ جسم جس کی کمیت یکساں طور پر پورے جسم پر تقسیم ہو)۔ تشاکل (Symmetry) کا لحاظ رکھتے ہوئے ہم یہ آسانی سے دکھا سکتے ہیں کہ اس طرح کے جسم کا مرکز کمیت جسم کے جیومیٹریائی مرکز پر ہوتا ہے۔

شکل 7.8 پتلی چھڑ کا کمیت مرکز معلوم کرنا

ایک پتلی چھڑ مان لیں جس کی چوڑائی اور موٹائی (اگر چھڑ کا تراشہ مستطیل نما ہے) یا نصف قطر (اگر چھڑ کا تراشہ استوانی ہے) لمبائی کے مقابلہ میں کافی کم ہے۔ مبدا نقطہ کو اگر ہم جیومیٹریائی مرکز پر رکھیں اور x- محور لمبائی دکھائے تو ہم انعکاسی تشاکل (Reflechan Symmetry) کی بنیاد پر یہ کہہ سکتے ہیں کہ چھڑ کے کسی بھی کمیت جز dm کے لیے جو x پر ہے، (-x) پر بھی ایک یکساں کمیت dm کا کمیت جز ہوگا۔ (شکل 7.8)

اس لیے اس مثال میں ایسے ہر جوڑے کا تکملہ میں حصّہ صفر ہوگا اور تکملہ $\int x\,dm$ کی قیمت صفر ہوگی۔مساوات (7.6) سے وہ نقطہ جہاں کمیت کا $\int x\,dm$ صفر ہوگا وہ کمیت مرکز کہلاتا ہے۔

اس لیے ایک متجانس پتلی چھڑ کا کمیت مرکز اس کے جیومیٹریائی مرکز پر منطبق ہے۔اتشاکل کی یہی دلیل متجانس چھلّوں، قرصوں، کروں اور دائری یا مستطیل نما تراشہ والی موٹی چھڑوں کے لیے بھی درست ہے۔اس طرح کے ہر جسم کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر جز dm جو نقطہ (x,y,z) پر واقع ہے اس کے لیے یکساں کمیت کا ایک جز نقطہ $(-x,-y,-z)$ پر بھی واقع ہوتا ہے۔ (یعنی، ان اجسام کے لیے مبدا انعکاس تشاکل کا نقطہ ہے)۔اس لیے مساوات (7.5 a) میں ہر تکملہ کی قیمت صفر ہوگی۔اس کا مطلب ہے اوپر دیے ہوئے ہر جسم کے لیے کمیت مرکز جیومیٹریائی مرکز پر ہی واقع ہوتا ہے۔

مثال 7.1 ایسے تین ذرات کا کمیت مرکز معلوم کیجیے جو ایک مساوی الاضلاع مثلث کی راسوں پر رکھّے ہوئے ہیں۔ذرّات کی کمیت 100g، 150g اور 200g بالترتیب ھے۔ مثلث کے ھر ضلع کی لمبائی 0.5 ھے۔

جواب

شکل 7.9

شکل 7.9 کے مطابق اگر ہم محور-x اور محور-y منتخب کریں تو مساوی الاضلاع مثلث OAB تشکیل دینے والے نقاط O، A اور B کے کوآرڈی نیٹس بالترتیب (0,0)، (0.5,0) اور $(0.25, 0.25\sqrt{3})$ ہیں۔فرض کیجیے کمیتیں 100g، 150 g اور 200g بالترتیب نقطہ O، A اور B پر ہیں۔تب

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)]\ \text{g m}}{(100 + 150 + 200)\ \text{g}}$$

$$= \frac{75+50}{450}\text{m} = \frac{125}{450}\text{m} = \frac{5}{18}\text{m}$$

$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})]\ \text{g m}}{450\ \text{g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{m}$$

شکل میں مرکز کمیت C دکھایا گیا ہے۔یہ نوٹ کریں کہ یہ نقطہ مثلث OAB کا جیومیٹریائی مرکز نہیں ہے۔کیوں؟

مثال 7.2 مثلث ورقہ (triangular lamina) کا کمیت مرکز معلوم کریں۔

جواب ورقہ (ΔLMN) کو ہم چھوٹی چھوٹی پٹیوں میں تقسیم کرسکتے ہیں جس میں ہر پٹی قاعدہ MN کے متوازی ہے (شکل 7.10)۔

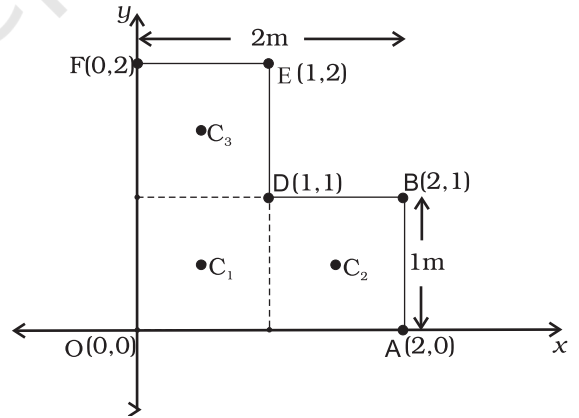
شکل 7.10

تشاکل کے لحاظ سے ہر حصہ کا کمیت مرکز اس کے وسطی نقطہ پر ہوگا۔اگر ہم سارے حصوں کے وسطی نقطوں کو ملائیں تو وسطی خط (Median) LP ملے گا۔مثلث کا کمیت مرکز اسی وسطی خط LP پر واقع ہوگا۔اسی طرح ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ کمیت مرکز، وسطی خط MQ اور وسطی خط NR پر واقع ہوگا۔اس کا مطلب ہے کہ کمیت مرکز وسطی خطوط کے

نقطہ تقاطع (point of intersection) پر ہوگا، یعنی مثلث کے وسطانی مرکز G (Centroid) پر

مثال 7.3 ریکساں L- شکل ورقہ (ایک پتلی چپٹی پلیٹ) جس کے ابعاد نیچے دیے گئے ہیں ، کا مرکز کمیت معلوم کریں۔ورقہ کی کمیت 3 Kg ہے۔

جواب شکل 7.11 کے مطابق x اور y محور کا انتخاب کرنے پر L- شکل ورقہ کی راسوں کے کوآرڈی نیٹس معلوم کیے جاسکتے ہیں جو شکل 7.11 میں دکھائے گئے ہیں۔۔ہم L- شکل ورقہ کو تین مربع شکلوں پر مشتمل مان سکتے ہیں، جن میں سے ہر مربع کے ضلع کی لمبائی 1 m ہے۔ ہر مربع کا وزن 1 kg ہے۔کیونکہ ورقہ ہموار ہے۔مربعوں کے مرکز کمیت، C_1، C_2، C_3 تشاکل کے ذریعے، ان کے جیومیٹریائی مراکز ہوں گے۔ جن کے کوآرڈی نیٹس ، بالترتیب، $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ، $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ہیں۔ ہر مربع کی کمیت کو ہم اسی نقطہ پر مرکوز سمجھتے ہیں۔اب پوری شکل کے لیے کمیت مرکز (x,y) ہوگا۔

y
2m
F(0,2)
E (1,2)
C_3
D(1,1)
B(2,1)
C_1
C_2
1m
O(0,0)
A(2,0)
x

شکل 7.11

$$X = \frac{[1(1/2)+1(3/2)+1(1/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}m$$

$$Y = \frac{[[1(1/2)+1(1/2)+1(3/2)]\,]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

L- شکل کا کمیت مرکز خط OD پر واقع ہوگا۔یہ ہم بغیر حساب کے بھی انداز کر سکتے تھے۔آپ بتا سکتے ہیں کیوں؟ مان لیجیے تین مربعے جو L- شکل کا ورقہ بناتے ہیں (شکل 7.11) اور ان کی کمیتیں الگ الگ ہوں، تب آپ کس طرح کمیت مرکز معلوم کریں گے؟

7.3 مرکز کمیت کی حرکت (MOTION OF CENTRE OF MASS)

مرکز کمیت کا مطالعہ کرنے کے بعد اب ہم اس مقام پر ہیں n ذرات کے نظام کے لیے اس کی طبیعی اہمیت پر بحث کر سکتے ہیں۔ہم دوبارہ مساوات (7.4 d) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n \qquad (7.7)$$

مساوات کے دونوں طرف وقت کے ساتھ تفرق (differentiate) کرنے پر

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

یا

$$M\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \qquad (7.8)$$

جہاں $\mathbf{v}_1 (= d\mathbf{r}_1/dt)$ پہلے ذرّہ کی رفتار ہے، $\mathbf{v}_2 (= d\mathbf{r}_2/dt)$ دوسرے ذرہ کی رفتار ہے اور $\mathbf{V}=d\mathbf{R}/dt$ کمیت مرکز کی رفتار ہے۔یہ خیال رہے کہ ہم نے فرض کیا ہے کہ کمیتیں: m_1, m_2 ...... وقت کے ساتھ سے نہیں بدلتی ہیں۔اس لیے تفرق کے وقت انھیں ہم نے مستقلہ عدد مانا ہے۔

مساوات (7.8) کو وقت کے ساتھ تفرق کرنے پر

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt}$$

یا

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n \qquad (7.9)$$

جہاں $\mathbf{a}_1(= d\mathbf{v}_1/dt)$ پہلے ذرّہ کا اسراع ہے اور $\mathbf{a}_2(= d\mathbf{v}_2/dt)$ دوسرے ذرّہ کا اسراع ہے اور $\mathbf{A}(=d\mathbf{V}/dt)$ ذرّات کے نظام کے مرکز کمیت کا اسراع ہے۔

اب نیوٹن کے دوسرے قانون کے مطابق پہلے ذرّہ پر لگ رہی قوت $F_1=m_1a_1$ ہے۔دوسرے ذرہ پر لگ رہی قوت $F_2=m_2a_2$ ہے۔اور

اسی طرح اور آگے بھی۔ مساوات (7.9) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$MA = F_1 + F_2 + \text{---------} + F_n \quad (7.10)$$

اس لیے ذرّات کے نظام کی کل کمیت اور کمیت مرکز کے اسراع کا حاصل ضرب ذرّات کے نظام پر لگ رہی تمام قوتوں کا سمتیہ جوڑ ہوتا ہے۔

نوٹ کریں جب ہم پہلے ذرّہ پر قوت F_1 کی بات کرتے ہیں تو یہ F_1 کوئی ایک قوت نہیں ہوتی بلکہ پہلے ذرے پر لگ رہی تمام قوتوں کا سمتیہ جوڑ ہوتا ہے۔ اسی طرح دوسرے ذرے کے لیے بھی۔ ہر ذرے پر لگ رہی قوتوں میں یہاں نظام کے باہر کے اجسام کے ذریعے ذرے پر لگائی گئی بیرونی قوتیں اور ذرات کے ذریعے ایک دوسرے پر لگائی گئی اندرونی قوتیں دونوں شامل ہیں۔ ہم نیوٹن کے تیسرے قانون سے جانتے ہیں کہ یہ اندرونی یہ قوتیں مساوی اور مخالف جوڑوں میں ہوتی ہیں اور مساوات (7.10) میں دیے گئے قوتوں کے حاصل جمع میں ان کا حصّہ صفر ہوتا ہے۔ ایسی لیے مساوات (7.10) میں صرف باہری قوتوں کا ہی حصہ ہوتا ہے۔

اب ہم مساوات (7.10) کو دوبارہ لکھ سکتے ہیں

$$MA = F_{ext} \quad (7.11)$$

جہاں F_{ext} ان تمام بیرونی قوتوں کا مجموعہ ہے جو ذرّات کے نظام پر لگ رہی ہیں۔ مساوات (7.11) کی تعریف اس طرح ہوگی۔ ذرّات کے نظام کا کمیت مرکز اس طرح حرکت کرتا ہے جیسے تمام کمیت، کمیت مرکز پر مرتکز ہو اور تمام بیرونی قوت بھی اسی نقطہ پر لگ رہی ہو۔

مساوات (7.11) حاصل کرنے کے لیے ہمیں ذرّات کے نظام کی فطرت کی وضاحت کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ یہ نظام ذرّات کا مجموعہ بھی ہوسکتا ہے۔ جس میں ہر طرح کی داخلی حرکت شامل ہو اور ایک استواری جسم جس میں صرف خطی انتقالی حرکت یا خطی انتقالی اور گردشی حرکت دونوں شامل ہوں۔ نظام کچھ بھی ہو اور انفرادی ذرّات کی حرکت خواہ کسی بھی طرح کی ہو مرکز کمیت مساوات (7.11) کے مطابق ہی حرکت کریگا۔

توسیعی (متناہی سائز کے) اجسام کو واحد ذرّات کے بہ طور برتنے کے بجائے (جیسا کہ ہم پچھلے ابواب میں کرتے رہے ہیں)، اب ہم انہیں ذرّات کے نظام کے بہ طور برت سکتے ہیں۔ پورے نظام کی کمیت کو کمیت مرکز کہتے ہیں۔ پورے نظام کی کمیت کو کمیت مرکز پر مرتکز مان کر اور نظام پر لگ رہی تمام باہری قوتوں کو کمیت مرکز پر کام کرتا ہوا مان کر، ہم ان اجسام کی حرکت کا خطی انتقالی جز، یعنی کہ، نظام کے کمیت مرکز کی حرکت، حاصل کر سکتے ہیں۔

یہی وہ طریقہ ہے جو ہم نے پہلے بھی اجسام پر لگ رہی قوتوں کا تجزیہ کرنے اور مسائل حل کرنے کے لیے استعمال کیا تھا، گو کہ ہم نے نہ تو طریقے کی الفاظ کے ذریعے وضاحت کی تھی اور نہ ہی اس کا کوئی جواز پیش کیا تھا۔ اب ہم سمجھ سکتے ہیں کہ پچھلے مطالعے میں ہم نے یہ فرض کرلیا تھا، حالانکہ کہا نہیں تھا کہ ہم فرض کررہے ہیں، کہ گردشی حرکت اور ذرّات کی اندرونی حرکت یا تو شامل نہیں ہیں یا ناقابلِ لحاظ ہیں۔ اب ہمیں اس مفروضے کی ضرورت نہیں ہے۔ اب ہم نے نہ صرف یہ کہ پہلے استعمال کیے گئے طریقے کا جواز حاصل کرلیا ہے بلکہ ہم نے یہ بھی معلوم کرلیا ہے کہ اگر (i) ایک استوارِ جسم خطی انتقالی حرکت کے ساتھ گردشی حرکت بھی کررہا ہو (ii) ایک ذرّات کے نظام میں ہر قسم کی اندرونی حرکت شامل ہو، تو اس کی خطی انتقالی حرکت کو کیسے بیان کریں اور علیحدہ کریں۔

شکل (7.12) مساوات (7.11) کو بہ خوبی واضح کرتی ہے۔ ایک پروجکٹائل جو ایک پیرابولک (مکافی) راستہ پر چل رہا ہوتا ہے درمیان میں ہوا میں دھماکہ سے مختلف حصوں میں بکھر جاتا ہے۔ وہ قوتیں جن کی وجہ سے دھماکہ ہوا، داخلی قوتیں ہیں۔ یہ قوتیں کمیت مرکز کی حرکت میں کوئی حصہ نہیں لیتیں۔ اس لیے جسم پر لگ رہی کل بیرونی قوت، یعنی کہ مادی کشش قوت، دھماکہ سے پہلے اور بعد میں ایک ہی ہوگا۔ اس لیے باہری قوت کے زیر اثر، مرکز کمیت، اسی مکافی حرکت خط پر حرکت کرنا جاری رکھتا ہے، جس پر وہ اگر دھماکہ نہ ہوا ہوتا تو حرکت کرتا۔

شکل 7.12 پراجکٹائل کے ٹکڑوں کا کمیت مرکز اسی مکافی حرکت خط پر حرکت کرنا جاری رکھتا ھے، جس پر اگر دھماکہ نہ ہوا ہوتا تو وہ حرکت کرتا۔

7.4 ذرات کے نظام کا خطی معیارِ حرکت

ہم یاد کریں کہ خطی معیارِ حرکت کی تعریف ہے :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{7.12}$$

اگر ہم نیوٹن کے دوسرے قانون کو یاد کریں تو ایک ذرّہ کے لیے

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.13}$$

جہاں F ذرہ پر لگی ہوئی قوت ہے۔ اگر ہم n ذرّات کا نظام مان لیں، جس میں ذرات کی کمیتیں بالترتیب $m_1, m_2 --- m_n$ اوران کی رفتاریں بالترتیب $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 --- \mathbf{v}_n$ ہیں۔ ہوسکتا ہے، ذرات آپس میں باہم عمل کریں اور ان پر باہری قوتیں بھی لگ رہی ہوں۔ پہلے ذرّہ کا خطی معیارِحرکت $m_1 v_1$ ہے، دوسرے ذرّہ کا $m_2 v_2$ اوراسی طرح n+th ذرّہ کا $m_n v_n$ ہے۔

n ذرّات کے نظام کے لیے خطی معیارحرکت انفرادی ذرّات کے معیار حرکت کا سمتیہ حاصل جمع ہوتا ہے۔ لہٰذا

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n$$

$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \tag{7.14}$$

مساوات (7.8) سے تقابل کرنے پر

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{7.15}$$

اس لیے ذرّات کے نظام کا کل معیارِحرکت نظام کی کل کمیت M اوراس کے کمیت مرکز کی رفتار v کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ مساوات (7.15) کو وقت کے ساتھ تفرق کرنے پر

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{7.16}$$

مساوات (7.16) اور (7.11) کا مقابلہ کرنے پر

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

یہ نیوٹن کے دوسرے قانون کی ہی ایک شکل ہے جس کی توسیع ذرات کے نظام کے لیے کی گئی ہے۔

مان لیجئے ذرّات کے نظام پر لگ رہی بیرونی قوتوں کا حاصل جمع صفر ہے۔ تب مساوات (7.17)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{P} = \text{constant} \tag{7.18 a}$$

اس لیے جب ذرّات کے نظام پر لگائی گئی کل بیرونی قوت صفر ہے تو اس حالت میں نظام کا کل معیارِحرکت ایک مستقلہ ہوگا۔ یہ ذرّات کے نظام کے کل خطی معیارِ حرکت کی بقا کا قانون بھی کہلاتا ہے۔ مساوات (7.15) کی رو سے جب لگائی گئی کل بیرونی قوت صفر ہے تو کمیت مرکز کی رفتار بھی مستقلہ ہوگی۔ اس باب میں ذرات کے نظام سے کی جانے والی پوری بحث میں ہم یہ فرض کر رہے ہیں کہ نظام کی کل کمیت مستقلہ رہتی ہے۔

یہ خیال رہے کہ داخلی قوتوں، یعنی کہ ذرات کے ذریعے ایک دوسرے پر لگائی گئی قوتوں، کی وجہ سے ہر ذرّہ پیچیدہ خط راہ (trajectory) اختیار کرسکتا ہے۔ لیکن، پھر بھی اگر نظام پر لگ رہی کل بیرونی قوت صفر ہے تو کمیت مرکز ایک ہی متعین رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ یعنی ایک خط مستقیم میں یکساں رفتار سے آزاد ذرّہ کی طرح حرکت کرتا ہے۔ سمتیہ مساوات (7.18 a) تین غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔

$P_x = c_1,\ P_y = c_2$ اور $P_z = c_3$ (7.18 b)

یہاں P_z ،P_y ،P_x کل میعارِحرکت P کے اجزاء ہیں جو بالترتیب x,y اور z سمتوں میں ہیں۔ c_1، c_2 اور c_3 مستقلہ ہیں۔

شکل 7.13 (a) ایک بھاری نیوکلیس (R_a) ایک ہلکے نیوکلیس (R_n) اور ایک الفا پارٹیکل (He) میں ٹوٹ جاتا ھے۔ نظام کا کمیت مرکز یکساں حرکت میں ھے
(b) بھاری نیوکمیں (R_a) کا ویسے ہی ٹوٹنا جبکہ کمیت مرکز حالتِ شکون میں ھے۔ دونوں ماحصل ذرات غالف سمتوں میں (آگے پیچھے) جاتے ھیں۔

مثال کے طور پر ہم کسی متحرک غیر مستحکم (unstable) ذرے کے ریڈیو ایکٹو تنزل (decay) کو لیتے ہیں جیسے ریڈیم کا نیوکلیس۔ ایک ریڈیم نیوکلیس ٹوٹ کر ایک ریڈان نیوکلیس اور ایک الفا ذرّہ بنتا ہے۔ اس تنزل میں عامل قوتیں نظام کی داخلی قوتیں ہوتی ہیں اور نظام پر لگ رہی باہری قوتیں نا قابلِ لحاظ ہوتی ہیں۔ اس لیے نظام کا کل خطی میعارِحرکت تنزل سے پہلے اور بعد میں یکساں ہوتا ہے۔ تنزل میں پیدا ہونے والے دونوں ذرے، ریڈان نیوکلیس اور α-ذرّہ مختلف سمتوں میں اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ انکا کمیت مرکز اسی راستے پر حرکت کرتا ہے، جس پر وہ ریڈیم نیوکلیس حرکت کر رہا تھا، جس کا تنزل ہوا ہے۔ (شکل 7.13 (a))۔

اگر ہم اس حوالہ فریم سے مشاہدہ کریں، جس میں کمیت مرکز حالتِ سکون میں ہے۔ تو تنزل میں شامل ذرّات کی حرکت نسبتاً سادہ معلوم ہوتی ہے۔ ماحصل ذرات مخالف سمتوں میں (آگے پیچھے) اس طرح کرتے ہیں کہ ان کا کمیت مرکز حالتِ سکون میں ہی رہتا ہے۔ (شکل 7.13 (b))۔

درج بالا ریڈیو ایکٹو تنزل کی طرح کئی دیگر مسائل کے حل میں بھی سہولت رہتی ہے اگر تجربہ گاہ حوالہ جاتی فریم کے بجائے کمیت مرکز حوالہ فریم میں کام کیا جائے۔

شکل 7.14 (a) دو تاروں s_1 (ٹوٹا ھوا خط) اور s_2 (مسلسل خط) کے خطوطِ راہ، جو ایک دوتائی نظام تشکیل دیتے ھیں اور ان کا کمیت مرکز C یکساں حرکت کررھا ھے۔
(b) یہی دوتائی نظام، کمیت مرکز حالتِ سکون میں ہے۔

فلکیات میں دوتائی ستارہ (binary or double) ایک عام واقعہ ہے۔ اگر کوئی بیرونی قوتیں نہیں ہیں تو کسی دوتائی ستارہ کا کمیت مرکز ایک آزاد ذرّے کی طرح حرکت کرتا ہے، جیسا کہ (شکل (a) 7.14) میں دکھایا گیا ہے۔ یکساں کمیت کے دو تاروں کے خطوطِ راہ بھی دکھائے گئے ہیں، جو پیچیدہ معلوم ہوتے ہیں۔ اگر ہم کمیت مرکز فریم پر جاتے ہیں تو ہم پاتے ہیں کہ دونوں تارے ایسے مرکز کمیت کے گرد ایک دائرہ میں حرکت کر رہے ہیں، جبکہ کمیت مرکز خود حالت سکون میں ہے۔ یہ

خیال رہے کہ تاروں کے مقام آپس میں مخالف قطری سمت میں ہیں (شکل (b) 7.14)۔اس طرح ہمارے حوالہ جاتی فریم میں تاروں کے خط راہ میں دوحرکتوں کا اتحاد ہے (i) کمیت مرکز کی ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت اور (ii) تاروں کے کمیت مرکز کے گرد دائری مدار۔

جیسا کہ مندرجہ بالا دونوں مثالوں میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نظام کے مختلف اجزاء کی حرکت کو ''کمیت مرکز کی حرکت'' اور ''مرکز کمیت کے گرد حرکت'' میں علیحدہ کرنا ایک بہت ہی کارآمد تکنیک ہے جس سے ہم نظام کی حرکت کو سمجھ سکتے ہیں۔

7.5 دوسمتیوں کا سمتی حاصلِ ضرب PRODUCT (VECTOR OF TWO VECTORS)

ہم پہلے ہی سمتیوں اور طبیعات میں اس کے استعمال کے بارے میں مطالعہ کر چکے ہیں۔ باب 6 (کام، توانائی اور طاقت) میں ہم دوسمتیوں کے غیرسمتی حاصل ضرب کی تعریف کر چکے ہیں۔ایک اہم طبیعی مقدار 'کام' کو دوسمتیہ مقداروں قوت اور ہٹاؤ کے غیرسمتی حاصل ضرب کے طور پر معرف کیا جاتا ہے۔

اب ہم دوسمتیوں کے ایک اورقسم کے حاصل ضرب کی تعریف کریں گے۔ یہ حاصل ضرب سمتیہ ہے۔ گردشی حرکت کے مطالعہ میں دواہم مقداروں کو، جن کے نام ہیں، قوت کی نقل وحرکت (moment of a force) اور زاویائی معیارِ رکت (angular momentum)، سمتیہ حاصل ضرب کے ذریعے معرف کیا جاتا ہے۔

سمتیہ حاصل ضرب کی تعریف (Definition of Vector Products)

دوسمتیہ **a** اور **b** کا سمتی حاصل ضرب، سمتیہ **c** اس طرح ہے

(i) c کی عددی مقدار: $C=c=ab\sin\theta$ جہاں **a** اور **b** عددی مقداریں ہیں اور θ دونوں سمتیوں کا درمیانی زاویہ ہے (ii) a اور b جس مستوی میں ہیں، C اس مستوی پر عمود ہے۔

(ii) اگر ہم دائیں ہاتھ والا اسکرو اس طرح لیں کہ اسکا سر **a** اور **b** کے مستوی میں ہوا اور اسکرو اس کی عمودی سمت میں ہو۔ اگر ہم اسکرو کے سر کو **a** سے **b** کے سمت میں گھمائیں تو اسکرو کا سرا **c** کے سمت میں حرکت کرے گا یہ دائیں ہاتھ والا اسکرو قاعدہ شکل (a) 7.15 میں دکھایا گیا ہے۔

اگر ہم اپنے دائیں ہاتھ کی انگلیوں کو ایک ایسے خط کے گرد موڑیں جو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے مستوی پر عمود ہے اور اگر ہماری انگلیاں $\vec{a}$ سے $\vec{b}$ کی سمت میں مڑی ہوں، تو ہمارا باہر نکلا ہوا انگوٹھا، $\vec{c}$ کی سمت کی نشاندہی کرتا ہے، جیسا کہ شکل (a) 7.15 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل **7.15** (a) دائیں ھاتھ والے اسکرو کا قاعدہ جو دوسمتیوں کے سمتیہ حاصل ضرب کی سمت کی تعریف کرتا ھے۔
(b) دائیں ھاتھ کا قاعدہ جو سمتیہ حاصل ضرب کی سمت کی تعریف کرتا ھے۔

دائیں ہاتھ کے طریقہ کو بہ آسانی اس طرح سمجھا جاسکتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی ہتھیلی کو کھولیں اور انگلیوں کو **a** سے **b** کی طرف توڑیں۔ آپ کا اٹھا ہوا انگوٹھا **c** کی سمت میں ہوگا۔

یہ سمجھنا چاہئے کہ کن ہی دو سمتیوں **a** اور **b** کے درمیان دو زاویے ہوں گے۔

- شکل (a)7.15 اور (b) 7.15 میں یہ زاویے θ اور (360-θ) ہیں۔ دونوں میں سے کوئی بھی طریقہ استعمال کرتے وقت گردش کو a اور b کے درمیان نسبتاً چھوٹے استعمال زاویہ ($<180^0$) کے ذریعہ لینا چاہیے۔ یہاں یہ زاویہ θ ہے۔

چونکہ اس سمتیہ حاصل ضرب کی نشاندہی کرنے کے لیے کراس کا نشان استعمال کرتے ہیں اس لیے اسے کراس پراڈکٹ بھی کہتے ہیں۔

نوٹ کریں کہ دو سمتیوں کا غیرسمتی حاصل ضرب تقلیبی (commutative) ہوتا ہے یعنی $a.b \neq b.a$، جیسا کہ پہلے بتایا جاچکا ہے۔

لیکن سمتیہ حاصل ضرب تقلیبی نہیں ہوتا۔ یعنی، $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$

a×b اور **b×a** دونوں کی عددی مقدار یکساں ($ab\sin\theta$) ہوتی ہے اور دونوں **a** اور **b** کی عمودی سمت میں ہوتے ہیں۔ لیکن دائیں ہاتھ والے اسکرو میں **a×b** کا مطلب **a** سے **b** کی طرف گھماؤ ہے جب کہ **b×a** کا مطلب **b** سے **a** کی طرف گھماؤ ہے۔ اس کا مطلب ہے دونوں سمتیے ہمیشہ مخالف سمت میں ہیں۔ اس لیے

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$$

سمتیہ حاصل ضرب کی ایک اور صفت انعکاس میں ان کا برتاؤ ہے۔ انعکاس میں (یعنی کہ آئینہ سے عکس لینے پر) ہمیں حاصل ہوتا ہے: $x \to -x$، $y \to -y$ اور $z \to -z$، اس لیے ایک سمتیے کے تمام جز سمتیہ اپنی سمت تبدیل کرلیتے ہیں اور $a \to -a$، $b \to -b$۔ اب ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ انعکاس میں **a×b** میں کیا ہوتا ہے

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\to(-\mathbf{a})\times(-\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

اس لیے انعکاس میں **a×b** اپنی سمت تبدیل نہیں کرتا۔

غیرسمتیہ اور سمتیہ دونوں حاصل ضرب سمتیہ جمع کے لحاظ سے تقسیمی (distributive) ہوتے ہیں۔ اس لیے

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

- ہم $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ کو اجزائی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ اس کے لیے ہمیں پہلے کچھ ابتدائی کراس حاصل ضرب کے بارے میں جاننا ہوگا۔

(i) $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ (0 ایک نل سمتیہ ہے یعنی ایک سمتیہ جس کی عددی قدر صفر ہے) یہ اس لیے ہوتا ہے کہ **a×a** کی عددی قدر: $a^2\sin 0^0=0$ ہے اس سے ہم پاتے ہیں کہ:

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}=\mathbf{0},\quad \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}=\mathbf{0},\quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{0} \qquad \text{(i)}$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(ii)}$$

یہ نوٹ کریں کہ $\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}$ کی عددی قدر $\sin 90^0$ یا 1 ہے کیونکہ $\hat{\mathbf{i}}$ اور $\hat{\mathbf{j}}$ دونوں کی عددی قدر اکائی ہے اور ان کا درمیانی زاویہ 90^0 ہے۔ ایک ایسا اکائی سمتیہ جو $\hat{\mathbf{i}}$ اور $\hat{\mathbf{j}}$ کے مستوی کی عمودی سمت میں، دائیں ہاتھ کے اسکرو طریقہ کے مطابق، $\hat{\mathbf{k}}$ ہو ہوگا۔ اس طرح ہم درج بالا نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔ آپ اسی طرح، تصدیق کرسکتے ہیں کہ:

$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{i}} \text{ اور } \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}$$

کراس پراڈکٹ کے تقلیبی اصول کے مطابق

$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}=-\hat{\mathbf{k}},\quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}=-\hat{\mathbf{i}},\quad \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\mathbf{j}}$$

نوٹ کریں کہ اگر: $\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}$ سمتیے مندرجہ بالا سمتیہ حاصل ضرب میں دائری ترتیب میں ہیں تو سمتیہ حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے اور اگر $\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}$ سمتیہ حاصل ضرب میں دائری ترتیب میں نہیں ہے تو سمتیہ حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

اب،

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_x\hat{\mathbf{i}}+a_y\hat{\mathbf{j}}+a_z\hat{\mathbf{k}})\times(b_x\hat{\mathbf{i}}+b_y\hat{\mathbf{j}}+b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$=a_xb_y\hat{\mathbf{k}}-a_xb_z\hat{\mathbf{j}}-a_yb_x\hat{\mathbf{k}}+a_yb_z\hat{\mathbf{i}}+a_zb_x\hat{\mathbf{j}}-a_zb_y\hat{\mathbf{i}}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{\mathbf{i}}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{\mathbf{j}}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

درج بالاتعلق قائم کرنے کے لیے ہم نے آسان کر اس پراڈکٹ کا استعمال کیا ہے۔ a × b کے اس تعلق کو ہم ڈٹرمنٹ (مقطعہ) (determinant) کی شکل میں بھی دکھاسکتے ہیں، جسے یادرکھنا آسان ہے۔

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

مثال 7.4 دوسمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا سمتی حاصل ضرب اورغیرسمتی حاصل ضرب معلوم کریں۔

$\mathbf{a} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$ اور $\mathbf{b} = (-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$

جواب

$$\mathbf{a.b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}).(-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

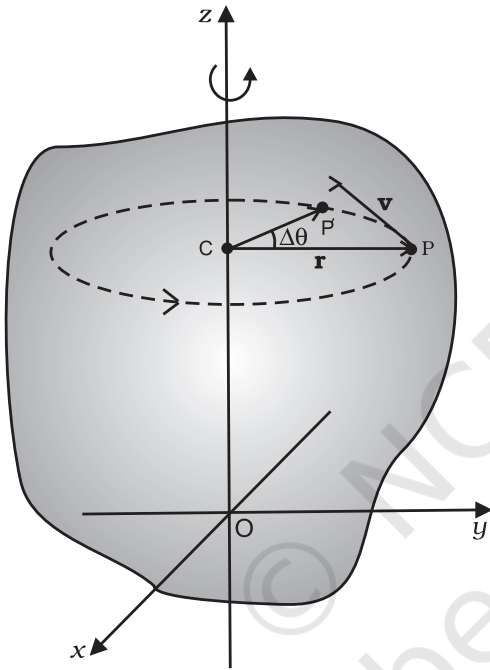
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 3 & -4 & 5\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=7\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}$$

خیال رہے

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$$

7.6 زاویائی رفتار اور خطی رفتار سے اس کا رشتہ (Angular Velocity and Its Relation with Linear Velocity)

اس حصّہ میں ہم یہ مطالعہ کرینگے کہ زاویائی رفتار کیا ہے اور اس کی گردشی حرکت میں کیا اہمیت ہے۔ ہم نے دیکھا کہ گردش کرتے ہوئے جسم کا ہر ذرہ ایک دائرہ میں حرکت کرتا ہے۔ ذرہ کی خطی رفتار کا تعلق زاویائی رفتار سے ہے۔ان دونوں مقداروں کے درمیان رشتہ میں ایک سمتیہ حاصل ضرب شامل ہے جس کے بارے میں ہم نے پچھلے حصّہ میں سیکھا ہے۔

اب ہم پیچھے حصّہ 7.4 میں جاتے ہیں۔ جیسا کہ کہا جاچکا ہے ایک متعین (جامد) محور کے گرد استواری جسم کی گردشی حرکت میں، جسم کا ہر ذرّہ ایک دائرہ میں حرکت کرتا ہے، جس کا مرکز C محور پر ہوتا ہے۔ دائرہ کا نصف قطر r ہوتا ہے، جو کہ نقطہ P کا محور سے عمودی فاصلہ ہے۔ ہم P پر ذرّہ کے خطی رفتار سمتیہ کو بھی دکھارہے ہیں۔ یہ P پر دائرہ پر مماس کی سمت میں ہے۔

شکل 7.16 ایک متعین محور کے گرد گردشی حرکت (استواری جسم کا ایک ذرہ (P) متعین محور (z) کے گرد دائرہ میں گردش کرتا ہے جب کہ اس کا مرکز (c) محور پر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کہ وقفہ Δt کے بعد ذرّہ کا مقام P' ہے (شکل 7.16)۔ زاویہ PCP'، ذرّہ کا وقفہ Δt میں زاویائی نقل Δθ ظاہر کرتا ہے۔ وقفہ Δt پر، ذرّہ کی اوسط زاویائی رفتار $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ہے۔ جیسے جیسے Δt صفر کی جانب جاتا ہے (یعنی کہ، اس کی قدر کم سے کم ہوتی جاتی ہے)، نسبت $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ایک انتہا پر پہنچتی ہے، جو ذرّہ کی مقام P پر ساعتی زاویائی رفتار $\frac{d\theta}{dt}$ ہے۔ ہم ساعتی زاویائی رفتار کو ω (یونانی حرف اومیگا) سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم دائرٔی

حرکت کے مطالعہ سے جانتے ہیں کہ دائرہ میں حرکت کرتے ہوئے ذرّہ کی خطی رفتار کی عددی قدر اور اس کی زاویائی رفتار ω میں ایک سادہ رشتہ ہے: $\mathbf{v} = \omega \mathbf{r}$، جہاں r دائرہ کا نصف قطر ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی دی ہوئی ساعت پر $\mathbf{v} = \omega\ \mathbf{r}$ رشتہ استوار جسم کے ہر ذرّہ کے لیے درست ہے۔ اس لیے ایک ذرہ جو متعین محور سے عمودی دوری r_i پر ہے، اس کی خطی رفتار v_i اس طرح ہوگی :

$$\mathbf{v_i} = \omega\ \mathbf{r_i} \quad (7.19)$$

اشاری عدد i کی قیمت 1 سے n تک ہے جہاں n جسم میں کل ذرّات کی تعداد ہے۔

وہ ذرّات جو محور پر ہیں، ان کے لیے: r = 0، اس لیے $v = \omega r = 0$

اس لیے وہ ذرّات جو محور پر ہیں حالت سکون میں ہوں گے۔ اس سے یہ تصدیق ہو جاتی ہے کہ محور متعین ہے (حرکت نہیں کرتا ہے)۔

یہ خیال رہے کہ ہم اسی زاویائی رفتار ω کو سارے ذرّات کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مکمل جسم کی زاویائی رفتار ω ہے۔

ہم نے ایک جسم کی خالص خطی انتقالی حرکت کی خاصیت یہ بتائی تھی کہ اس حرکت میں کسی بھی دی ہوئی ساعت پر جسم کے تمام اجزاء کی رفتار یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح ایک جسم کی خالص گردشی حرکت کی خاصیت یہ ہے کہ کسی بھی ساعت پر جسم کے تمام اجزاء کی زاویائی رفتار یکساں ہوتی ہے۔ نوٹ کریں کہ کسی نصب کئے ہوئے محور کے گرد، ایک استوارِ جسم کی گردش کی یہ تعریف اسی بات کو کہنے کا دوسرا طریقہ ہے، جو ہم نے حصّہ 7.1 میں کہی تھی۔ یعنی کہ، جسم کا ہر ذرّہ ایک ایسے دائرہ میں حرکت کرتا ہے، جو محور پر عمود مستوی میں ہوتا ہے اور جس کا مرکز محور پر ہوتا ہے۔

ہماری اب تک کی بحث سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویائی رفتار غیر سمتیہ ہے۔ دراصل یہ ایک سمتیہ ہے۔ ہم اسے ثابت نہیں کریں گے، لیکن ہم یہ بات تسلیم کر لیتے ہیں۔ ایک متعین (نصب شدہ) محور کے گرد گھومنے پر زاویائی رفتار سمتیہ گردش کے محور کی طرف ہوتا ہے اور اس سمت کی طرف اشارہ کرتا ہے جس طرف دائیں ہاتھ والا اسکرو آگے بڑھتا ہے اگر اسکرو کے سر کو جسم کے ساتھ گھمایا جائے (شکل 7.17)۔

اس سمتیہ کی عددی قدر: $\omega = d\theta/dt$ ہے۔

شکل 7.17 (a) اگر دائیں ہاتھ والے اسکرو کا سر جسم کے ساتھ گردش کرتا ہے تو اسکرو زاویائی رفتار ω کی سمت میں آگے بڑھتا ہے۔ اگر جسم کی گردش کی سمت (جو گھڑی سوئی کی سمت یا مخالف سمت میں ہوسکتی ہے) تبدیل ہوجائے تو ω بھی اپنی سمت تبدیل کرلیتا ہے۔

شکل 7.17 (b) زوایائی رفتار سمتیہ $\vec{\omega}$، متعین (نصب شدہ) محور کی سمت میں ہے۔ جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔ P پر ذرّہ کی خطی رفتار: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ہے۔ یہ $\vec{\omega}$ اور $\vec{r}$ دونوں پر عمود ہے اور اس کی سمت ذرّہ کے ذریعے بنائے گئے دائرہ پر مماس کی سمت میں ہے۔

اب ہمیں دیکھنا ہے کہ سمتیہ حاصل ضرب $\omega \times \mathbf{r}$ کس سے مطابقت رکھتا ہے۔ شکل (b) 7.17، جو شکل 7.16 کا حصہ ہے، ذرہ P کے راستہ کو دکھاتی ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، سمتیہ ω متعین (جامد) (z-) محور کی سمت میں ہے اور نقطہ P پر استوارِ جسم کے ذرّے کا، مبدا O کی مناسبت سے مقام سمتیہ: $\vec{r} = \vec{OP}$ ہے۔ نوٹ کریں کہ مبدا گردش کے محور پر منتخب کیا گیا ہے۔

$$\omega \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{OP} = \omega \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$$

لیکن

$$\omega \times \mathbf{OC} = 0$$

(ω، **OC** کی سمت میں ہے۔) ∴

اس لیے

$$\omega \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{CP}$$

سمتیہ $\omega \times \mathbf{CP}$، ω پر عمود ہے۔ یعنی کہ سمتیہ $\vec{\omega} \times \vec{CP}$، z- محور، **CP**، اور P پر ذرّے کے ذریعے بنائے گئے دائرے کے نصف قطر پر عمود ہے۔ اس لیے اس کی سمت، P پر دائرہ کے مماس کی سمت میں ہے $\vec{\omega} \times \vec{CP}$ کی عددی قدر: ω (CP) ہے کیونکہ ω اور CP دونوں ایک دوسرے کی عمودی سمت میں ہیں۔ ہم CP کو $\mathbf{r}_\perp$ سے دکھائیں گے نہ کہ r سے۔

اس لیے $\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp$، $\omega r_\perp$ عددی قدر کا ایک سمتیہ ہے، جس کی سمت P پر ذرّہ کے ذریعے بنائے گئے دائرہ پر مماس کی سمت میں ہے۔ P پر خطی رفتار سمتیہ کی عددی قدر اور سمت بھی وہی ہیں۔ اس لیے:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \qquad (7.20)$$

دراصل، (مساوات 7.20)، استوارِ جسم کی اس گردشی حرکت کے لیے بھی درست ہے جو ایک متعین (نصب شدہ) نقطے کے گرد کی جاتی ہے، جیسے کہ ایک لٹو کی گردشی حرکت [شکل (a) 7.6]۔ اس صورت میں $\vec{r}$، متعین (نصب شدہ) نقطہ کی مناسبت سے، جسے مبدا منتخب کیا جاتا ہے، ذرّہ کے مقام سمتیہ کو ظاہر کرتا ہے۔

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ متعین محور کے گرد گردش میں ω کی سمت وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ اس کی عددی قدر وقت کے ساتھ بدل سکتی ہے۔ ایک زیادہ عمومی گردشی حرکت میں، ω کی عددی قدر اور سمت دونوں وقت کے ساتھ تبدیل ہوسکتی ہیں۔

7.6.1 زاویائی اسراع (Angular acceleration)

آپ نے محسوس کیا ہوگا کہ ہم گردشی حرکت کا مطالعہ انہیں مماثل خطوط پر آگے بڑھا رہے ہیں، جن پر ہم نے خطی انتقالی حرکت کا مطالعہ کیا تھا اور جس سے ہم واقفیت حاصل کر چکے ہیں۔ خطی انتقالی حرکت کے حرکی متغیرات خطی نقل (ہٹاؤ) اور رفتار (v) کے مماثل، گردشی حرکت میں زاویائی نقل اور زاویائی رفتار (ω) ہیں۔ اس لیے گردشی حرکت کو بیان کرنے کے لیے ضروری ہے کہ زاویائی اسراع کو معرف کیا جائے جو خطی انتقالی حرکت میں خطی اسراع کا مماثل ہے۔ جس طرح خطی انتقالی حرکت میں خطی رفتار کی وقت کے ساتھ تبدیلی شرح کو بہ طور خطی اسراع معرف کیا جاتا ہے، اسی طرح زاویائی رفتار کی وقت کے ساتھ تبدیلی کی شرح زاویائی اسراع (α) کہلاتی ہے۔ اس لیے

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.21)$$

اگر گردشی محور متعین (جامد) ہو تو ω اور α کی سمت بھی متعین ہوگی۔ اس طرح یہ سمتیہ مساوات غیر سمتیہ مساوات میں بدل جاتی ہے۔

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.22)$$

7.7 قوت گردشہ اور زاویائی معیارِ حرکت (Torque and Angular Momentum)

اس حصّہ میں ہم دو طبیعی مقداروں سے تعرف حاصل کریں گے جنہیں دو سمتیوں کے سمتی حاصل ضرب کی شکل میں معرف کیا جاتا ہے۔ مقداریں یہ ذرات کے نظام کی حرکت کے مطالعہ میں کافی اہم ہیں خاص طور پر استوارِ جسم کی حرکت کے مطالعہ میں۔

7.7.1 قوت گردشہ [Moment of Force (Torque)]

ہم یہ پڑھ چکے ہیں کہ کسی استوار جسم کی حرکت، عمومی شکل میں، گردشی اور خطی انتقالی حرکت کا مجموعہ ہوتی ہے۔ اگر جسم کسی ایسے نقطہ یا محور کے گرد، گردش کر رہا ہو جو متعین (جامد) ہو تو صرف گردشی حرکت ہوتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ جسم کی خطی انتقالی حالت کو بدلنے کے لیے، یعنی کہ خطی اسراع پیدا کرنے کے لیے، قوت کی ضرورت ہوتی ہے۔ اب آپ یہ پوچھ سکتے ہیں کہ گردشی حرکت میں قوت کی مماثل کیا ہے؟ اس سوال کا جواب حاصل کرنے کے لیے ایک عملی مثال لیتے ہیں: دروازہ کا کھولنا یا بند کرنا۔ دروازہ ایک استوار جسم ہے جو قبضوں سے گذرتے ہوئے جامد عمودی محور کے گرد گردش کرسکتا ہے۔ دروازہ کو کون گھماتا ہے؟ یہ صاف ہے کہ جب تک کہ کوئی قوت نہیں لگائی جائے گی دروازہ نہیں گھومے گا۔ لیکن ہر قوت یہ کام نہیں کرسکتی۔ کوئی قوت جو قبضہ خط پر لگائی گئی ہو کوئی گردشی حرکت نہیں دیتی۔ جبکہ دی ہوئی عددی قدر کی وہ قوت جو دروازہ کے عمودی سمت میں اس کے کنارے پر لگائی جائے گردشی حرکت پیدا کرنے میں سب سے زیادہ موثر ہوتی ہے۔ اس لیے گردشی حرکت کے لیے، صرف لگائی گئی قوت ہی نہیں بلکہ قوت کس طرح اور کہاں لگائی گئی ہے، بھی اہم ہیں۔

قوت کا گردشی مماثل قوت کا معیارِ اثر (Moment of force) ہے۔ اسے قوتِ گردشہ (Torque) بھی کہتے ہیں۔ (ہم الفاظ، قوت کا معیارِ اثر اور قوتِ گردشہ ایک دوسرے کے متبادل کے طور پر، استعمال کریں گے)۔ ہم پہلے ایک واحد ذرّہ (مخصوص صورت) کے لیے قوت کے معیارِ اثر کی تعریف کریں گے۔ پھر ہم اس تصور کی توسیع ذرّات کے نظام، جس میں استوار جسم بھی شامل ہے، کے لیے کریں گے۔ پھر ہم قوت کے معیارِ اثر اور گردشی حرکت کی حالت میں ہونے والی تبدیلی، یعنی کہ استوار جسم کے اسراع میں رشتہ معلوم کریں گے۔

شکل 7.18 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$، τ اس مستوی کے، جس میں r اور F واقع ہیں، عمودی سمت میں ہے اور اس کی سمت دائیں ہاتھ والے اسکرو کے قاعدہ کے مطابق دی جاتی ہے۔

اگر قوت کسی ایک ذرہ پر لگتی ہے جو مبداء O کے مطابق نقطہ P پر ہے اور اس کا مقام سمتیہ r ہے (شکل 7.18) تو ذرے پر لگ رہے قوت کے معیارِ اثر کی تعریف، مبداء O کے مطابق، سمتیہ حاصلِ ضرب سے کی جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (7.23)$$

قوت معیارِ اثر یا قوت گردشہ ایک سمتی مقدار ہے۔ علامت τ یونانی حرف ٹاؤ ہے۔ τ کی عددی قدر ہے: (7.24 a) $\tau = r F \sin\theta$

جہاں r مقام سمتیہ r کی عددی قدر ہے یعنی لمبائی OP، F قوت F کی عددی قدر ہے اور θ، r اور F کے درمیان زاویہ ہے۔

قوت معیارِ اثر (قوت گردشہ) کے ابعاد $ML^2 T^{-2}$ ہیں۔ جو کام یا توانائی کے ابعاد ہیں۔ جب کہ یہ کام سے بالکل ہی الگ قسم کی طبعی مقدار ہے۔ قوت گردشہ سمتیہ ہے جب کہ کام غیر سمتیہ ہے۔ قوت گردشہ کی SI اکائی نیوٹن میٹر (Nm) ہے۔ قوت گردشہ کی عددی قدر لکھی جاسکتی ہے۔

$$\tau = (r \sin\theta) F = r_{\perp} F \qquad (7.24b)$$

یا

$$\tau = rF\sin\theta = rF_{\perp} \quad (7.24c)$$

جہاں $r_{\perp}(= r\sin\theta)$، F جس خط پر لگ رہی ہے، مبدے سے اس خط کا عمودی فاصلہ ہے۔ اور $F_{\perp}(= F\sin\theta)$ قوت F کا وہ جز ہے جو r کے عمودی سمت میں ہے۔ خیال رہے کہ اگر $x = O$ ، $F = O$ یا 180^0 یا $\theta = O$ ہو تو $\tau = O$ ہوگا۔

اس لیے قوت گردشہ صفر ہوتی ہے جب یا تو عامل قوت کی قدر صفر ہو یا جس خط پر قوت لگ رہی ہے وہ مبدا سے گذرتا ہو۔

$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ سمتی حاصل ضرب ہے اس لیے دوسمتیہ کے حاصل ضرب والی خصوصیت یہاں بھی لاگو ہوگی۔ اگر $\mathbf{F}$ کی سمت مخالف کردی جائے تو قوت گردشہ کی سمت بھی مخالف ہوجائے گی۔ اگر دونوں سمتیہ $\mathbf{r}$ اور $\mathbf{F}$ مخالف سمت میں کردیے جائیں تو قوت گردشہ کی سمت وہی رہے گی۔

7.7.2 ایک ذرہ کا زاویائی معیارِ حرکت (Angular Momentum of a Particle)

جس طرح قوت گردشہ خطی حرکت میں قوت کا گردشی مماثل ہے اسی طرح زاویائی معیارِ حرکت بھی خطی معیارِ حرکت کا گردشی مماثل ہے۔ ہم سب سے پہلے ایک ذرہ کے لیے زاویائی معیارِ حرکت کی تعریف بیان کریں گے اور ایک ذرہ کی حرکت میں اس کا استعمال دیکھیں گے۔ اس کے بعد اسی زاویائی معیارِ حرکت کی توسیع ذرّاتی نظام بہ شمولیت استوار جسم کے لیے کریں گے۔

قوت گردشہ کی طرح زاویائی معیارِ حرکت بھی سمتیہ حاصل ضرب ہے۔ اسے خطی معیارِ حرکت میعارِ اثر بھی کہا جاتا ہے۔ اب ہم سمجھ سکتے ہیں کہ زاویائی معیارِ حرکت کی تعریف کیا ہے۔

ہم ایک ذرہ لیتے ہیں جس کی کمیت m اور خطی معیارِ حرکت p ہے، جو مبدا O سے r مقام پر ہے۔ ذرہ کا زاویائی معیارِ حرکت l ہے تو

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \quad (7.25a)$$

زاویائی معیارِ حرکت سمتیہ کی عددی قدر

$$l = r\,p\sin\theta \quad (7.26\ a)$$

جہاں p خطی معیارِ $\mathbf{p}$ کی عددی قدر ہے اور θ، $\mathbf{r}$ اور $\vec{\mathbf{P}}$ کے درمیان زاویہ ہے۔ ہم لکھ سکتے ہیں

$$l = r\,p_{\perp} \quad \text{یا} \quad r_{\perp}p \quad (7.26\ b)$$

جہاں $r_{\perp}(= r\sin\theta)$ مبدا سے $\mathbf{p}$ کے سمتی خط کی عمودی دوری ہے اور $p_{\perp}(= p\sin\theta)$، $\mathbf{p}$ کا وہ جز ہے جو $\mathbf{r}$ سے عمودی سمت میں ہے۔ ہم یہ امید کرتے ہیں کہ زاویائی میعارِ حرکت صفر ہوگا اگر خطی میعارِ حرکت صفر $(p = O)$ ہے یا ذرہ مبدا پر $(r=O)$ ہے یا $\mathbf{p}$ کا سمتیہ خط مبدا سے گذرتا ہے $(\theta = 0^0$ یا $180^0)$۔

طبعی مقداروں، قوت کا میعارِ حرکت اور زاویائی میعارِ حرکت میں ایک اہم رشتہ ہے۔ یہ قوت اور خطی میعارِ حرکت کے رشتے کا گردشی مماثل ہے۔ ایک ذرہ کے لیے یہ رشتہ حاصل کرنے کے لیے ہم وقت کے اعتبار سے $\boldsymbol{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ کا تفرق کرتے ہیں۔

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$$

اب دائیں طرف کا تفرق معلوم کرنے کے لیے حاصل ضرب قاعدہ لگانے پر

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

اب ذرہ کی رفتار $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ اور $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ہے۔

اس لیے: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p} = \mathbf{v}\times m\mathbf{v} = 0,$ کیونکہ دو متوازی سمتیوں کا حاصل ضرب صفر ہوتا ہے۔

چونکہ $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F},$ اس لیے

$$\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$$

یا

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (7.27)$$

اس لیے، کسی ذرہ کے زاویائی معیارِ حرکت میں وقت کے ساتھ تبدیلی کی شرح ذرہ پر لگ رہے قوتِ گردشہ کے مساوی ہے۔ یہ مساوات $F = d\mathbf{p}/dt$ کا گردشی مماثل ہے جو ایک ذرہ کی خطی انتقالی حرکت کے لیے نیوٹن کے دوسرے قانون کو ظاہر کرتی ہے۔

ذرّات کے نظام کے لیے قوت گردشہ اور زاویائی معیارحرکت

(Torque and angular momentum for a system of particles)

ایک دیے ہوئے نقطہ کے گرد ذرّات کے نظام کا کل زاویائی معیارِ حرکت حاصل کرنے کے لیے ہمیں انفرادی ذرات کے زاویائی معیارِ حرکت کا سمتیہ جمع کرنے کی ضرورت ہے۔ اس لیے n ذرّات کے نظام کے لیے

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \ldots + \boldsymbol{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i$$

i^{th} ذرّہ کا زاویائی معیارِ حرکت ہوگا

$$\boldsymbol{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

جہاں r^i، کے مطابق i^{th} ذرہ کا مقام سمیتہ، کسی دیئے گئے مبدا سے ہے اور $\mathbf{P}_i = (m_i \, \mathbf{v}_i)$ اس ذرّہ کا خطی میعارِ حرکت ہے۔ ذرّہ کی کمیت m_i ہے (اور رفتار $\mathbf{v}_i$ ہے)۔ ہم لکھ سکتے ہیں کہ ذرّات کے نظام کے لیے کل زاویائی میعارِ حرکت ہوگا

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25\ b)$$

یہ ایک ذرے کے زاویائی میعارِ حرکت کی تعریف (مساوات 7.25 a) کی ذرت کے نظام کے میعارِ حرکت کے لیے توسیع ہے۔

مساوات (7.23) اور (7.25 b) استعمال کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\mathbf{l}_i}{dt} = \sum_i \tau_i \qquad (7.28\ a)$$

جہاں τ_i، i^{th} ذرہ پر لگ رہا قوتِ گردشہ ہے۔

$$\tau_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

سائیکل پہیہ پر ایک تجربہ

ایک سائیکل پہیہ لیجیے اور اسکی دھوری کو دونوں طرف بڑھائیے۔ دونوں کنارے A اور B پر ایک ایک دھاگہ باندھئے۔

دونوں دھاگوں کو ایک ساتھ ایک ہاتھ سے اس طرح پکڑیں کہ پہیہ سیدھا کھڑا ہو۔ اگر آپ دھاگہ چھوڑیں گے تو پہیہ جھک جائے گا۔ ایک ہاتھ سے دونوں دھاگے پکڑ کر پہیہ کو سیدھا کھڑا رکھیں اور دوسرے ہاتھ سے خوب زور سے پہیہ کو دھوری کے گرد دوسرے ہاتھ سے گھمائیں۔

اب ایک دھاگہ مانا B کو چھوڑ دیجیے اور مشاہدہ کیجیے کہ کیا ہوتا ہے۔

پہیہ عمودی سطح میں گھومتا رہتا ہے اور گردشی مستوی دھاگہ A کے گرد جھک جاتا ہے جسے آپ نے پکڑ رکھا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پہیہ کا گردشی محور یا اسکا زاویائی تحرک دھاگہ A کے گرد ہے۔

گھومتا ہوا پہیہ زاویائی معیارِحرکت پیدا کرتا ہے۔ اس زاویائی معیارِحرکت کی سمت معلوم کریں۔ جب آپ نے گھومتے ہوئے پہیہ کو دھاگہ A سے پکڑ رکھا ہے اس حالت میں ایک قوت گردشہ پیدا ہوتا ہے (اب ہم اسے آپکے لیے چھوڑتے ہیں کہ قوت گردشہ کس طرح پیدا ہوتا ہے اور اس کی سمت کیا ہوتی ہے)۔ قوت گردشہ کا اثر زاویائی تحرک پر یہ ہوتا ہے کہ قوت گردشہ اور زاویائی معیارحرکت پر یہ ہوتا ہے کہ وہ اسے ایک ایسے محور کے گرد جھوما دیتا ہے جو محور زاویائی معیارِحرکت اور قوت گردشہ دونوں پر عمود ہے۔ اُن تمام بیانات کی تصدیق کیجیے۔

قوت F_i، i^{th} ذرّہ پر لگ رہی تمام بیرونی قوتوں F_i^{ext} اور نظام کے دوسرے ذرات کے ذریعے i^{th} ذرہ پر لگائی جا رہی تمام داخلی قوتوں F_i^{int} کا سمتیہ جمع ہے۔اس لیے ہم کل قوت گردشہ میں بیرونی اور داخلی قوتوں کا حصّہ الگ الگ کر کے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{int}$$

جہاں

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$$

اور

$$\boldsymbol{\tau}_{int} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{int}$$

ہمیں نیوٹن کے صرف تیسرے قانون (یعنی کن ہی دو ذرّات کے مابین کام کر رہی قوتیں یکساں اور مخالف ہوتی ہیں) کو ہی نہیں ماننا ہے بلکہ یہ بھی ماننا ہے کہ یہ قوتیں دو ذرّات کو ملانے والے خط کی سمت میں بھی ہیں۔اس حالت میں کل قوت گردشہ میں داخلی قوت کا حصّہ صفر ہوگا۔کیونکہ ہر عمل۔ردِعمل قوتوں کے جوڑے سے حاصل ہونے والا قوت گردشہ صفر ہوگا۔اس لیے $\boldsymbol{\tau}_{int} = 0$ اور $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$

چونکہ $\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i$، مساوات (7.28 a) سے

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \qquad (7.28\ b)$$

اس لیے کسی نقطہ کے گرد ذرّات کے نظام کے کل زاویائی میعارِ حرکت کی شرح وقت (حوالہ فریم کے مبدے کو مبدا مانا گیا ہے) اسی نقطہ کے گرد نظام پر لگ رہے تمام بیرونی قوت گردشہ کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے۔مساوات (7.28 b) مساوات (7.23) کی ہی ایک توسیع ہے۔یہ خیال رہے کہ اگر صرف ایک ہی ذرّہ ہے تو کوئی داخلی قوت یا داخلی قوت گردشہ نہیں ہوگی۔مساوات (7.28 b) درج ذیل کی گردشی مماثل ہے

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (7.17)$$

یہ خیال رہے کہ مساوات (7.17) کی طرح، مساوات (7.28 b) بھی ذرّات کے کسی بھی نظام کے لیے لاگو ہوتی ہے خواہ وہ استوار جسم ہو یا اس کے انفرادی ذرّات میں ہر طرح کی داخلی حرکت ہو۔

زاویائی میعارِ حرکت کی بقا

(Conservation of angular momentum)

اگر $\tau_{ext} = 0$ ہے تو مساوات (7.28 b) اس طرح ہوگی

یا

$$\mathbf{L} = \text{مستقلہ قدر} \qquad (7.29\ a)$$

اس لیے اگر ذرّات کے نظام کا کل بیرونی قوت گردشہ صفر ہے تو اس حالت میں نظام کا کل زاویائی میعارِ حرکت مستقلہ ہوگا۔مساوات (7.29 a) تین غیر سمتی مساواتوں کے مساوی ہے۔

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2 \text{ اور } L_z = K_3 \qquad (7.29\ b)$$

یہاں K_1، K_2 اور K_3 مستقلہ قدریں ہیں۔L_x، L_y اور L_z کل زاویائی میعارِ حرکت L کے بالترتیب x، y اور z محوروں پر اجزاء ہیں۔اس قول کا کہ کل زاویائی میعارِ حرکت کی بقا ہوتی ہے مطلب یہ ہے کہ ان تینوں اجزاء میں سے ہر ایک کی بقا ہوتی ہے۔

مساوات (7.29 a) مساوات (7.18 a) کا گردشی مماثل ہے جو کہ ذرّات کے نظام کے لیے کل خطی میعارِ حرکت کے بقا کا قانون ہے۔مساوات (7.18 a) کی طرح یہ بھی کئی حالات میں استعمال ہوتا ہے۔اس باب کے آخر میں ہم اس کے کچھ دلچسپ استعمالات بھی سیکھیں گے۔

مثال 7.5 مبدا کے گرد ایک قوت $7\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ کا قوت گردشہ معلوم کریں۔قوت جس ذرّہ پر لگ رہی ھے، اس کا مقام سمتیہ $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ھے۔

جواب یہاں $\mathbf{r} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

اور $\mathbf{F} = 7\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

قوت گردشہ $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ معلوم کرنے کے لیے ہمیں ڈِٹرمنٹ طریقہ کا استعمال کرنا چاہیۓ۔

$$\tau = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3-(-7))\hat{\mathbf{k}}$$

یا

$$\tau = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$$

مثال 7.6 یہ دکھاھیے کہ ایک ایسے ذرے کا زاویائی معیارِحرکت جو متعین رفتار سے چل رھا ھے کسی بھی نقطے کے گرد پوری حرکت میں ایک مستقلہ رھتا ھے۔

جواب مانا کہ ذرّہ جس کی رفتار **v** ہے کسی لمحہ t پر نقطہ P پر ہے۔ہم ذرّہ کا زاویائی معیارِحرکت کسی نقطہ O کے گرد معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

شکل 7.19

زاویائی معیارِحرکت $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ ہے۔اس کی عددی قدر $mvr\sin\theta$ ہے۔جہاں θ، r اور v کے درمیان کا زاویہ ہے (شکل 7.19)۔گرچہ ذرّہ وقت کے ساتھ مقام تبدیل کرتا ہے مگر **v** کا سمتی خط وہی رہتا ہے۔اس لیے $OM = r\sin\theta$ ایک مستقلہ ہے۔

l کی سمت r اور v کے مستوی پر عمود ہے۔یہ شکل میں صفحہ کے اندر کے طرف ہے۔یہ سمت وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی۔

اس طرح l کی عددی قدر اور سمت یکساں رہتی ہے۔اس لیے اس کی بقا ہوتی ہے۔کیا کوئی بیرونی قوت گردشہ ذرہ پر لگ رہا ہے؟

7.8 استوار جسم کا توازن (Equilibrium of a Rigid Body)

اب ہم ذرّات کے عمومی نظاموں کی حرکت کے بجائے استوار جسم کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

آیئے دہرائیں کہ استوار جسم پر بیرونی قوتیں کیا اثر ڈالتی ہیں (اب آگے ہم لفظ 'بیرونی' استعمال نہیں کریں گے۔ جب تک مخصوص طور پر کہا نہ جائے، ہم صرف بیرونی قوتوں اور بیرونی قوت گردشہ کا ہی مطالعہ کریں گے)۔قوتیں استوار جسم کی خطی انتقالی حرکت کی حالت کو تبدیل کرتی ہیں۔یعنی یہ کل خطی معیارِحرکت کو مساوات (7.17) کے مطابق تبدیل کرتی ہیں۔لیکن قوتوں کا صرف یہی اثر نہیں ہوتا۔جسم پر لگی کل قوت گردشہ ہوسکتا ہے صفر نہیں ہو۔اس طرح کی قوت گردشہ، استوار جسم کی گردشی حالت کو بدل دیتی ہے۔یعنی یہ کل زاویائی معیارِحرکت کو مساوات (7.28 b) کے مطابق، تبدیل کردیتی ہے۔

ایک استوار جسم کو ہم میکانکی توازن میں اس وقت کہہ سکتے ہیں جب اس کے کل خطی معیارِحرکت اور زاویائی معیارِحرکت وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتے، یا اسی کے مساوی، جسم میں نہ تو خطی اسراع ہے اور نہ ہی زاویائی اسراع۔اس کا مطلب ہے

(1) خطی توازن (translational equilibrium) کے لیے جسم پر عمل پذیر سبھی قوتوں کا سمتیہ حاصل جمع صفر ہونا چاہیئے۔

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30\ a)$$

اگر جسم پر لگ رہی کل قوت صفر ہے تو جسم کا کل خطّی معیارِ حرکت، وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگا۔ مساوات (730a) جسم کے خطّی انتقالی توازن کی شرط ہے۔ جسم پر لگ رہی کل قوتِ گردشہ، یعنی کہ جسم پر لگ رہی ہر قوتِ گردشہ کا سمتیہ حاصلِ جمع، صفر ہے۔

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \ldots + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30\ b)$$

اگر استوار جسم پر کل قوت گردشہ صفر ہے تو جسم کا کل زاویائی معیارِحرکت وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگا۔ مساوات (7.30 b) جسم کے گردشی توازن کی شرط بتاتی ہے۔

کوئی یہ سوال کرسکتا ہے کہ کیا گردشی توازن کی شرط یا (مساوات (b) 7.30) برقرار رہ سکتی ہے اگر وہ مبدا جس کی نسبت سے قوت گردشہ لیا گیا ہے اسے تبدیل کر دیا جائے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر خطی انتقالی توازن کی شرط (مساوات (a) 7.30) استوار جسم کے لیے صحیح ہے تو مبدا کی تبدیلی سے کوئی فرق نہیں پڑے گا یعنی گردشی توازن شرط، قوت گردشہ جس کے گرد لیا گیا ہے اس مبدے کے طابع نہیں ہے اور مبدے کی تبدیلی سے فرق نہیں پڑتا۔ مثال 7.7 سے ایک خاص صورت میں، ایک جفت (Couple)، کے لیے، اس کی تصدیق ہوجاتی ہے۔ یعنی کہ، اس صوت میں جبکہ دو قوتیں استوار جسم پر لگ رہی ہوں اور خطی توازن برقرار ہو۔ n قوتوں کے لیے، اس کی عموی صورت میں تصدیق آپ کے لیے بہ طور مشق چھوڑی جا رہی ہے۔

مساوات (7.30 a) اور مساوات (7.30 b) دونوں سمتیہ مساواتیں ہیں۔ ان میں سے ہر ایک تین غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔ مساوات (7.30 a) مماثل ہے:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\ \ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (7.31\ a)$$

جہاں F_{ix}، F_{iy} اور F_{iz} بالترتیب قوت $\boldsymbol{F}_i$ کے x, y اور z جز ہیں۔ اسی طرح مساوات (7.30 b) تین غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے

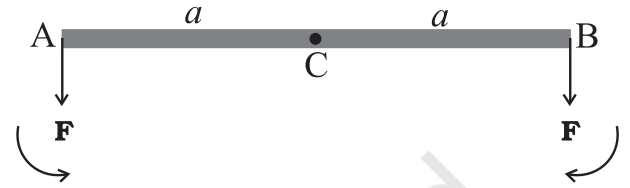
$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0،\ \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \ \text{ اور } \ \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (7.31\ b)$$

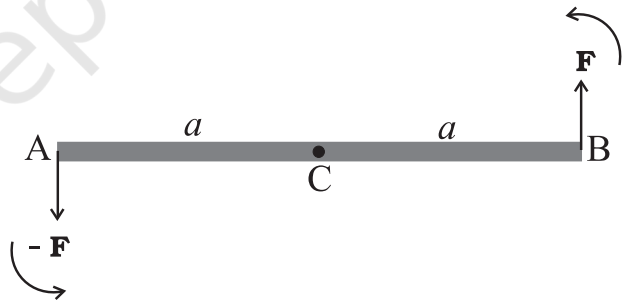
جہاں τ_{ix}، τ_{iy} اور τ_{iz} بالترتیب قوت گردشہ τ_i کے x،y اور z اجزاء ہیں۔

مساوات (7.31a) اور (7.31 b) استوار جسم کے میکانکی توازن کے لیے چھ ایسی شرطیں ہیں، جو ایک دوسرے کے تابع نہیں ہیں۔ بہت سارے سوالوں میں ایک جو جسم پر لگ رہی تمام قوتیں ہم مستوی (coplanar) بھی ہوسکتی ہیں۔ ایسی صورت میں میکانیکی توازن کے لیے صرف 3 شرطوں کو ہی مطمئن کرنا کافی ہوتا ہے۔ ان میں سے دو شرطیں خطّی انتقالی توازن سے متعلق ہیں، یعنی کہ، مستوی میں کن ہی دو عموی محوروں کی سمت میں، قوتوں کے اجزاء کا حاصل جمع صفر ہونا لازمی ہے۔ اور تیسری شرط گردشی توازن سے متعلق ہے، یعنی کہ، قوتوں کے مستوی پر عمود، کسی محور کے گرد لگ رہے تمام قوت گردشہ کے اجزاء کا حاصل جمع صفر ہونا لازمی ہے۔

ایک استوار جسم کے توازن کی شرائط کا مقابلہ ایک ذرہ کے توازن کی شرائط سے، جنھیں ہم پچھلے ابواب میں پڑھ چکے ہیں، کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ گردشی حرکت کا اطلاق ایک واحد ذرہ پر نہیں کیا جا سکتا، اس لیے ایک واحد ذرے کے توازن کے لیے صرف خطّی انتقالی توازن کی شرائط ہی لاگو ہوتی ہیں۔ اس لیے، ایک واحد ذرے کے توازن کے لیے، اس پر لگ رہی تمام قوتوں کا سمتیہ حاصلِ جمع صفر ہونا لازمی ہے۔ کیونکہ یہ تمام قوتیں ایک واحد ذرے پر لگ رہی ہیں، اس لیے یہ یقیناً ہم نقطہ (Concurrent) ہوں گی۔ ہم نقطہ قوتوں کے تحت توازن سے پچھلے ابواب میں بحث کی جا چکی ہے۔

ایک جسم جزوی توازن (Partial quitibrium) میں بھی ہوسکتا ہے۔ یعنی کہ جسم خطی انتقالی توازن میں تو ہو مگر گردشی توازن میں نہ ہو یا گردشی توازن میں ہو اور خطّی انتقالی توازن میں نہ ہو۔

ایک ہلکی چھڑ (جسکی کمیت نظرانداز کی جاسکتی ہو) AB لیجیے۔اس کے دونوں سروں A اور B پر دو متوازی یکساں عددی قدر کی قوتیں، جو یکساں سمت میں کام کررہی ہوں، چھڑ کی عمودی سمت میں لگائیں (شکل (a) 7.20)۔

شکل 7.20 (a)

مان لیجیے C، AB کا وسطی نقطہ ہے یعنی CA=CB=a۔ A اور B پر لگ رہی قوتوں کے معیارِ اثر کی عددی قدریں (af) مساوی ہوں گی لیکن سمتیں مخالف ہوں گی۔ چھڑ پر کل معیارِ اثر صفر ہوگا۔ نظام گردشی توازن میں تو ہوگا مگر خطی انتقالی توازن میں نہیں ہوگا، اگر $\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$

شکل 7.20 (b)

شکل (b) 7.20 میں B پر لگی قوت شکل (a) 7.20 کے مقابلے میں مخالف سمت میں ہے۔اس طرح اب اسی چھڑ پر دو مساوی اور مخالف سمتوں میں قوتیں لگ رہی ہیں جن کی سمت چھڑ کی عمودی سمت میں ہے۔ایک قوت نقطہ A پر اور دوسری نقطہ B پر لگ رہی ہے۔ یہاں دونوں قوتوں کے معیارِ اثر برابر ہیں مگر مخالف سمت میں نہیں ہیں۔دونوں معیارِ اثر گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کی سمت کے لحاظ سے ایک ہی سمت میں ہیں اور چھڑ کو گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کرنے کی سمت کی مخالف سمت میں گردش دیتے ہیں۔جسم پر لگی کل قوت صفر ہے۔اس لیے جسم خطی انتقالی توازن میں ہوگا جب کہ یہ گردشی توازن میں نہیں ہے۔حالانکہ چھڑ کو کہیں بھی جڑا نہیں گیا ہے پھر بھی اس میں خالص گردشی حرکت (بغیر خطی انتقالی حرکت کے) ہوگی۔

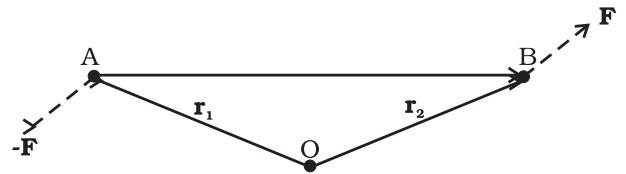
ایسی مخالف سمتوں میں اور مساوی قوتوں کا جوڑا، جن کے کام کرنے کے خطوط الگ الگ ہوں جفت (couple) کہلاتا ہے۔ایک جفت خطّی انتقال کے بغیر گردش پیدا کرتا ہے۔

جب ہم بوتل کے ڈھکن کو گھما کر کھولتے ہیں ہماری انگلیاں ڈھکن پر جفت فراہم کرتی ہیں (شکل (a) 7.2)۔دوسری مثال زمین کے مقناطیسی میدان میں رکھے قطب نما (Compass needle) کی ہے (شکل (b) 7.21)۔شمالی اور جنوب قطب پر زمین کا مقناطیسی میدان یکساں قوت لگاتی ہے۔قطب شمال پر لگی قوت شمال کی جانب ہوتی ہے اور قطب جنوب پر لگی قوت جنوب کی جانب ہوتی ہے۔جب سوئی شمال۔جنوب سمت میں ہوتی ہے تو صرف اس وقت ہی دونوں قوتیں ایک ہی خط پر لگ رہی ہوتیں ہیں، ورنہ ہمیشہ دونوں قوتیں الگ الگ خطوط پر لگی ہیں۔س لیے سوئی پر زمینی مقناطیسی میدان کے باعث جفت پیدا ہوتا ہے۔

شکل 7.21 (a) ہماری انگلیاں ڈھکن کو گھمانے پر جفت فراہم کرتی ہیں۔

شکل (b) 7.21 کمپاس سوئی کے قطب پر زمینی مقناطیسی میدان مخالف اور مساوی قوت لگاتی ہے۔یہ دونوں قوتیں جفت بناتی ہیں۔

مثال 7.7 دکھائیے کہ جفت کا گردشہ اس نقطہ پر منحصر نہیں کرتا جس نقطہ کے گرد گردشہ (moment) لیا جاتا ہے۔

جواب

شکل 7.22

مان لیجیے جفت ایک استوار جسم پر لگ رہی ہے (شکل 7.22)۔قوت F اور (–F) بالترتیب نقطہ B اور A پر لگ رہا ہے۔لفظوں کے مقام سمتیے مبدا سے r_1 اور r_2 ہیں۔اب اگر ہم قوت کا گردشہ مبدا کے گرد لیں۔

جفت کا گردشہ = دو قوتوں کے گردشہ کا جوڑ جو جفت بناتا ہے

$$= \mathbf{r_1} \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r_2} \times \mathbf{F}$$

$$= \mathbf{r_2} \times \mathbf{F} - \mathbf{r_1} \times \mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}) \times \mathbf{F}$$

لیکن

$$\vec{r}_1 + \vec{AB} = \vec{r}_2$$

اور، اس لیے

$$\vec{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

اس لیے جفت کا گردشہ **AB×F** ہوگا۔

صاف طور پر یہ کہا جاسکتا ہے کہ یہ مبدا کے تابع نہیں ہے۔مبدا وہ نقطہ ہے جس کے گرد ہم نے قوت کا گردشہ لیا ہے۔

7.8.1 گردشہ کا اصول (Principle of moments)

ایک مثالی لیور عام طور پر ہلکی (نظرانداز کی جاسکنے والی کمیت) ڈنڈی کا بنا ہوتا ہے جو لمبائی کے ایک نقطہ پر جڑی ہوتی ہے۔اس نقطہ کو ٹیک (fulcurm) کہتے ہیں۔بچوں کے کھیل کے میدان میں سی سا (see-saw) لیور کی ایک عمدہ مثال ہے۔دو قوتیں F_1 اور F_2 آپس میں متوازی ہوتی ہیں اور عام طور پر لیور کے عمودی سمت میں ہوتی ہیں۔یہ قوتیں ٹیک سے بالترتیب دوری d_1 اور d_2 بناتی پر لگ رہی ہیں۔(شکل 7.23)۔

شکل 7.23

لیور، میکانکی توازن میں ایک نظام ہے۔مان لیں کہ R ٹیک پر سہارے کا ردِّعمل ہے۔R کی سمت، قوت F_1 اور F_2 کے مخالف ہے۔خطی توازن کے لیے

$$R - F_1 - F_2 = 0 \quad \text{(i)}$$

گردشی توازن کے لیے ہم ٹیک کے گرد گردشہ لیتے ہیں۔گردشہ کا حاصل

جوڑصفر ہونی چاہیے

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

عام طور پر گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کی مخالف سمت والے معیارِ حرکت کو ہم مثبت مانتے ہیں ے اور گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کی سمت والے معیارِاثر کو منفی۔ یہ خیال رہے کہ R، ٹیک پر لگتا ہے اور ٹیک کے گرد صفر گردشہ دیتا ہے۔

عام طور پر لیور قوت میں F_1 میں کچھ وزن اٹھایا جانا ہے۔ یہ بار (Load) کہلاتا ہے اور اس کی ٹیک سے دوری d_1 کو بار بازو (load arm) کہتے ہیں۔ قوت F_2 بار اٹھانے کے لیے لگائی گئی کوشش (effort) ہے۔ ٹیک سے کوشش کی دوری d_2 کو کوشش بازو (effort arm) کہتے ہیں۔

مساوات (ii) کو ہم لکھ سکتے ہیں

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad \text{(7.32 a)}$$

یا

کوشش × کوشش بازو = بار × بار بازو

درج بالا مساوات لیور کے لیے معیارِاثر کا اصول ظاہر کرتی ہے۔ $\frac{F_1}{F_2}$ تناسب کو میکانکی فائدہ (Mechanical advantage, MA) کہتے ہیں۔

$$M.A = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad \text{(7.32 b)}$$

اگر کوشش بازو d_2، باز بازو سے زیادہ ہے تو میکانکی فائدہ ایک سے زیادہ ہوگا۔ میکانکی فائدہ کے ایک سے زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ بہت تھوڑی کوشش پر زیادہ بار اٹھا سکتے ہیں۔ آپ کے گرد لیور کی بہت ساری مثالیں سی سا کے علاوہ بھی ہیں۔ ترازو کی بیم (beam) بھی ایک لیور ہے۔ اس طرح کی بہت ساری مثالیں پتہ لگائیں اور ٹیک، کوشش اور کوشش بازو، بار اور بار بازو کو پہچاننے کی کوشش کریں۔

آپ اس طرح دکھا سکتے ہیں کہ گردشہ کا اصول اس وقت بھی لاگو ہوتا ہے جب قوت F_1 اور F_2 دونوں عمود سمت میں نہیں ہیں لیکن لیور پر کوئی زاویہ بنا رہا ہے۔

7.8.2 مادی کشش مرکز (Centre of gravity)

آپ میں سے بہت ساروں کو ایک انگلی کے نوک پر اپنی کاپی کو متوازن حالت میں رکھنے کا تجربہ ہوسکتا ہے۔

شکل 7.24 ایک ایسا ہی تجربہ بتاتی ہے جسے آپ بآسانی کرکے دیکھ سکتے ہیں۔ آپ بے قاعدہ شکل کا ایک کارڈ بورڈ اور پتلی نوک والی پنسل لیں۔ آپ ایک نقطہ G ایسا معلوم کرسکتے ہیں جہاں اگر پنسل کی نوک رکھی جائے تو یہ کارڈ بورڈ متوازی حالت میں ہوگا۔ یہی نقطہ جس پر کارڈ بورڈ حالت توازن میں ہے کارڈ بورڈ کا مادی کشش مرکز (CG) کہلاتا ہے۔ پنسل کی نوک اوپر کی جانب ایک قوت لگاتی ہے جس سے کارڈ بورڈ میکانیکی توازن ہوتا ہے (شکل 7.24)۔ نوک کا ردِعمل کارڈ بورڈ کے کل وزن (کارڈ بورڈ پر لگ رہی کل مادی کشش قوت) Mg کے مساوی اور مخالف ہے۔ اس لیے کارڈ بورڈ خطی انتقالی توازن میں ہوگا۔ یہ گردشی توازن میں بھی ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو غیر متوازن قوت گردشہ کی وجہ سے ایک طرف جھک کر نیچے گر جائیگا۔ کارڈ بورڈ جن ذرّات سے بنا ہے، ان میں ہر ذرّے پر مادی کشش قوتیں: $m_1\mathbf{g}$، $m_2\mathbf{g}$ لگ رہی ہیں اور اس لیے کارڈ بورڈ کے ہر نقطہ پر قوتِ گردشہ وغیرہ کے ذریعہ قوت گردشہ (Torques) لگیں گے۔

شکل 7.24 پنسل کی نوک پر کارڈ بورڈ کی متوازن حالت۔ ٹیک نقطہ G مادی کشش مرکز ھے۔

کارڈ بورڈ کا مادی کشش مرکز ایسے مقام پر ہے جہاں قوتوں $m_1\mathbf{g}$، $m_2\mathbf{g}$ وغیرہ کی وجہ سے لگ رہا کل قوتِ گردشہ صفر ہے۔

اگر ایک توسیعی جسم کے ith ذرہ کا، اس کے CG کی مناسبت سے، مقام سمتیہ $\mathbf{r}_i$ ہے تب اس ذرّہ پر لگ رہی مادی کشش قوت کی وجہ سے CG کے گرد اس ذرّہ پر لگ رہا قوت گردشہ ہے : $\tau_i = \mathbf{r}_i \times m_i\,\mathbf{g}$ ہوگا۔ CG کے گرد کل ثقلی قوت گردشہ صفر ہے۔ یعنی

$$\tau_g = \sum \tau_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{7.33}$$

اس لیے ہم جسم کے CG کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ نقطہ جہاں جسم پر کل ثقلی قوت گردشہ صفر ہو۔

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ مساوات (7.33) میں g سارے ہی ذرّات کے لیے یکساں ہے۔ اس لیے اسے تجمع (summation) سے باہر کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ ہوگا چونکہ g غیر صفر عدد ہے۔ یہ خیال رہے کہ مقام سمتیے $\mathbf{r}_i$، CG کی مناسبت سے لیے گئے ہیں۔ حصہ (7.2) میں مساوات (7.4 a) کے نیچے دی گئی دلیل کی بنیاد پر، اگر حاصلِ جمع صفر ہے، تو مبدا لازمی طور پر جسم کا کمیت مرکز ہوگا۔ اس لیے جسم کا مادی کشش مرکز، جسم کے کمیت مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ اس لیے صحیح ہے کیونکہ جسم چھوٹا ہے اور g کی قدر جسم کے اندر ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک تبدیل نہیں ہوتی۔ اگر یہی جسم اتنی بڑی ہو کر g کی قدر ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ کی طرف تبدیل ہو جاتی ہو تب مادی کشش مرکز، کمیت مرکز پر منطبق نہیں ہوگا۔ بنیادی طور پر یہ دونوں مختلف تصورات ہیں۔ کمیت مرکز کا مادی کشش سے کوئی تعلق نہیں ہے۔ یہ صرف جسم میں کمیت کی تقسیم کے تابع ہے۔

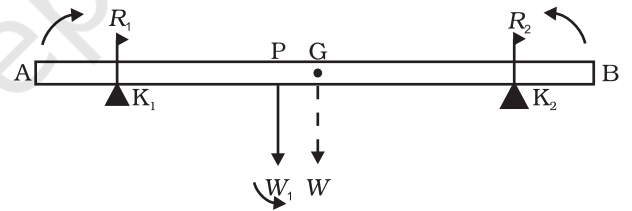
حصّہ 7.2 میں ہم نے کئی قاعدہ (regular)، ہم قسم (homogeneous) اشکال میں کمیت مرکز کا مقام معلوم کیا ہے۔ وہاں استعمال کیے گئے طریقے سے ان اجسام کا مادی کشش مرکز بھی حاصل کیا جاسکتا ہے، بشرطیکہ اجسام چھوٹے ہوں۔

شکل 7.25 بے قاعدہ شکل کے اجسام کشش مرکز معلوم کرنا۔ مادی کشش مرکز G، جسم جس نقطہ A پر لٹکا ھے، اس سے گذرے تنصیبی خط پر ھے۔

جواب

شکل 7.25 میں باقاعدہ جسم جیسے کارڈ بورڈ کے مادی کشش مرکز معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ بتایا ہے۔ اگر آپ جسم کو کسی ایک نقطہ جیسے A سے لٹکائیں تو A سے گذرنے والا انتصابی خط CG سے ہو کر گذرے گا۔ ہم AA_1 کا انتصابی خط کھینچتے ہیں۔ اب ہم جسم کو کچھ دوسرے

نقطوں B اور C پر لٹکاتے ہیں۔ان نقطوں سے گذر رہے انتصابی خطوط کا تقاطع (intersection) 'مادی کشش' CG فراہم کرتا ہے۔بتائیں کہ یہ طریقہ کیوں صحیح ہے؟ چونکہ جسم چھوٹا ہے یہی طریقہ استعمال کر کے ہم کمیت مرکز بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 7.8 ایک دھات کی چھڑ جس کی لمبائی 70 cm اور کمیت 4.00 kg ہے، دو دھاردار ٹیکوں (knife edges) پر ٹکی ہوئی ہے، جن میں سے ہر ایک کا فاصلہ چھڑ کے کنارے سے 10 cm ہے،چھڑ کے ایک کنارے سے 30 cm کے فاصلے پر ایک 6 kg کی کمیت لٹکائی گئی ہے۔دھاردارٹیکوں پر رِدّعمل معلوم کیجیے۔ (چھڑ کو ہموار تراشہ والی اور متجانس مانیے)

شکل **7.26**

جواب

شکل 7.26 میں چھڑ AB دکھائی گئی ہے۔دھار دار ٹیکس k_1 اور k_2 مقام پر ہے۔مادی کشش مرکز G پر ہے اور لٹکایا گیا وزن P نقطہ پر ہے۔

یہ خیال رہے کہ چھڑ کا وزن W مادی کشش مرکز G پر لگ رہا ہے۔چھڑ کا تراشہ (Cross Section) یکساں اور متجانس ہے۔اس لیے G چھڑ کے مرکز پر ہے۔ $AB = 70 cm$، $AG = 35 cm$، $AP = 30 cm$، $PG = 5 cm$، $Ak_1 = Bk_2 = 10 cm$ اور $K_1G = k_2G = 25 cm$ چھڑ کا وزن $w = 4.00 kg$ اور لٹکایا گیا وزن $= w_1 = 6.00 kg$

R_1 اور R_2 دونوں دھاردار ٹیکوں پر ردِّعمل ہیں۔

چھڑ کے خطی انتقالی توازن کے لیے

$$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0 \quad \text{(i)}$$

خیال رہے کہ W_1 اور W یہ دونوں انتصابی نیچے کی جانب لگے رہے ہیں اور R_1 اور R_2 انتصابی اوپر کی جانب لگ رہے ہیں۔

گردشی توازن دیکھنے کے لیے ہم قوتوں کے معیارِ اثر لیتے ہیں۔ایک آسان نقطہ جس کے گرد معیارِ اثر لیے جاسکتے ہیں وہ G ہے۔R_2 اور W_1 کے معیارِ اثر کی سمت گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کے مخالف (+ve) ہے جب کہ R_1 کے معیارِ اثر کی سمت گھڑی سوئیوں کی حرکت کی سمت (-ve) ہے۔

گردشی توازن کے لیے

$$R_1 (K_1G) + W_1 (PG) + R_2 (K_2G) = 0 \quad \text{(ii)}$$

یہ دیا گیا کہ $W = 4.00 gN$، $W_1 = 6.00 gN$

جہاں g، مادی کشش اسراع ہے۔ہم $g = 9.8 m/s^2$ لیتے ہیں

مساوات (i) سے

$$R_1 + R_2 - 4.00gN - 6.00gN = 0$$

یا $R_1 + R_2 = 10.00g\ N$ (iii)

$$= 98.00\ N$$

مساوات (ii) سے $-0.25 R_1 + 0.05 W_1 + 0.25 R_2 = 0$

$$R_2 - R_1 = 1.2g\ N = 11.76\ N \quad \text{(iv)}$$

مساوات (ii) اور (iv) سے $R_1 = 54.88\ N$

$$R_2 = 43.12\ N$$

اس لیے ٹیک کا ردِّعمل k_1 پر تقریباً 55N ہے اور k_2 پر 43N ہے۔

مثال 7.9 ایک 3m لمبی سیڑھی جس کا وزن 20 kg ہے ایک چکنی دیوار جھکی ہوئی ہے۔اس کا نچلا حصّہ فرش پر دیوار سے 1m کی دوری پر حالت سکون میں ہے (شکل 7.27)۔دیوار اور فرش کا ردِّعمل قوت معلوم کریں۔

جواب

شکل **7.27**

جواب

سیڑھی AB، 3m لمبی ہے۔اس کا نچلا حصّہ A دیوار سے AC=1m کی دوری پر ہے۔پیتھا غورس مسئلہ کے مطابق $BC=2\sqrt{2}$۔سیڑھی پر لگی قوتیں: اس کا وزن W جو مادی کشش مرکز D پر ہے، F_1 اور F_2 بالترتیب دیوار اور فرش کی رِدِّعمل قوتیں۔چونکہ دیوار چکنی بے رگڑ ہے اس لیے قوت F_1 دیوار ہے قوت پر عمود ہے۔قوت F_2 کو ہم دو اجزاء میں تحلیل کر سکتے ہیں۔عمودی رِدِّعمل N اور رگڑ قوت F۔خیال رہے کہ F سیڑھی کو پھسلنے سے بچاتی ہے اور اسکی سمت دیوار کی طرف ہوتی ہے۔

خطی توازن کے لیے، قوتوں کو عمودی سمت میں لینے پر

$$N - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

افقی سمت میں قوتوں کو لینے پر

$$F - F_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

گردشی توازن کے لیے، قوت کا گردشہ A کے گرد لینے پر

$$2\sqrt{2}\,F_1 - (1/2)\,W = 0$$

اب $W = 20\ g = 20 \times 9.8\ N = 196.0\ N$

مساوات (i) سے $N = 196.0$

مساوات (iii) سے

$$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6\,N$$

مساوات (ii) سے

$$F = F_1 = 34.6\,N$$

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0\,N$$

قوت F_2 افقی سطح سے زاویہ α بناتا ہے۔

$$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}\ , \quad \alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80^\circ$$

7.9 جمودِ گردشہ (Moment of Inertia)

ہم پہلے ہی یہ کہہ چکے ہیں کہ خط انتقال حرکت کے متوازی گردش حرکت کے بارے میں جانکاری حاصل کر رہے ہیں۔اس سلسلے میں ہمیں ابھی بھی ایک اہم سوال کا جواب دینا ہے۔گردش حرکت میں کمیت کا مماثل کیا ہے؟ ہم اس سوال کا جواب اس حصّہ حاصل کرنے کی کوشش کریں گے۔گفتگو کو آسان بنانے کے لیے ہم صرف جامد محور کے گرد گردش لیں گے اور گردشی جسم کی حرکی توانائی معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔ہم جانتے ہیں کہ جامد محور کے گرد گردش کرتے ہوئے جسم کا ہر ذرّہ ایک دائرہ میں حرکت کرتا ہے جس کی خطی رفتار مساوات (7.19) سے دی جاتی ہے۔(شکل 7.16)۔ایک ذرّہ جو محور سے r_i دوری پر واقع ہے اس کی خطی رفتار $\upsilon_i = r_i\omega$ ہے۔اس ذرّہ کی حرکی توانائی

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

جہاں m_i ذرّہ کی کمیت ہے۔جسم کی کل حرکی توانائی K انفرادی ذرّات کی کل حرکی توانائی کا جوڑ ہوتا ہے۔

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2\omega^2)$$

یہاں n جسم کے اندر ذرّات کی تعداد ہے۔خیال رہے کہ ω ہر ذرّہ کے لیے یکساں ہے۔اس لیے ω کو تجمیع سے باہر لے سکتے ہیں۔

$$K = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)$$

ہم استوار جسم کے لیے ایک نئی مقدار جمود گردشہ (I) لیتے ہیں۔

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7.34)$$

تعریف کے مطابق

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (7.35)$$

خیال رہے کہ I زاویائی رفتار کے قدر پر منحصر نہیں کرتا۔ یہ استوار جسم کی ایک صفت ہے اور جس محور کے گرد یہ گھومتا ہے، اس کی صفت ہے۔

مساوات (7.35) کو گردشی جسم کی حرکی توانائی کا خطی حرکت کی حرکی توانائی سے موازنہ کرنے پر

$$K = \frac{1}{2} m\, v^2$$

یہاں m جسم کی کمیت ہے اور v رفتار ہے۔ ہم پہلی ہی دیکھ چکے ہیں کہ زاویائی رفتار ω (ایک جامد محور کے گرد گردشی حرکت میں) اور خطی رفتار v (خطی حرکت میں) میں ایک مماثلت ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ جمود گردشہ I کمیت کا گردشی مماثل ہے۔ ایک جامد محور کے گرد گردش میں جمود گردشہ وہی کردار ادا کرتا ہے جو خطی حرکت میں کمیت کا ہے۔

اب دو سادہ صورتوں میں جمود گردشہ معلوم کرنے کے لیے مساوات (7.34) کا استعمال کرتے ہیں۔

(a) R نصف قطر اور M کمیت کے کسی پتلے چھلے پر غور کیجیے جو اپنے مرکز کے اطراف اپنے مستوی میں زاویائی رفتار ω سے گردش کر رہا ہے۔ چھلے کی ہر ایک کمیت عنصر (mass element) محور سے R دوری پر ہے اور وہ چال $R\omega$ سے حرکت کر رہا ہے۔ لہٰذا حرکی توانائی

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

اس کا مساوات (7.35) سے موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = MR^2$$

شکل 7.28 ایک ہلکی چھڑ، جسکی لمبائی l ہے، کمیتوں کے جوڑے کے ساتھ محور کے گرد نظام کے مرکز کمیت کے گرد گھوم رہی ہے جو چھڑ سے عمودی سمت میں ہے۔ نظام کی کل کمیت M ہے۔

(b) اب لمبائی l کی کوئی بے کمیت ایسی استوار چھڑ لیجیے جس کے سروں پر M کمیت کا کوئی جوڑا جڑا ہوا اور اس محور کے اطراف گردش کرتا ہو جو کمیت مرکز سے گذرتا ہے اور چھڑ پر عمود ہے۔ ہر ایک کمیت M/2 محور سے R=l/2 دوری پر ہے۔ لہٰذا اس چھڑ کا جمود گردشہ

$$(M/2)\ (l/2)^2 + (M/2)(l/2)^2$$

اس طرح چھڑ کے عمودی محور کے اطراف گردش کرنے والی کمیتوں کے جوڑے کے لیے

$$I = Ml^2/4$$

جدول 7.1 میں کچھ مخصوص شکلوں کے اجسام کے جمود گردشہ دیے گئے ہیں۔ جس طرح کسی جسم کی کمیت اس جسم کی خطی حرکت میں ہونے والی تبدیلی کا مزاحمت کرتی ہے اور خطی حرکت میں اس جسم کے جمود کی پیائش ہوتی ہے ٹھیک اسی طرح کسی دیئے گئے محور کے اطراف کسی جسم کا جمود گردشہ اس جسم کی گردشی حرکت میں ہونے والی تبدیلی کی مزاحمت کرتی ہے اور اسے اس جسم کے گردشی جمود کی پیائش کے طور پر مانا جاسکتا ہے۔ یہ اس ڈھنگ کی پیائش ہے جس کے مطابق جسم کے مختلف حصّے گردشی محور سے مختلف دوریوں پر پھیلے ہیں۔ کمیت کے برخلاف کسی جسم کا جمود گردشہ ایک متعین مقدار نہیں ہوتا بلکہ اس کی قدر کل جسم کی بہ نسبت گردشی محور کے مقام اور تشریق (orientation) کے تابع ہوتی ہے۔ اس ڈھنگ کی پیائش کے لیے گردش کرتے ہوئے کسی استوار جسم کی کمیت گردشی محور کی بہ نسبت کس طرح تقسیم ہے، ہم ایک دیگر نئے پیرامیٹر جائریشن (گھوم) کے نصف قطر

(radius of gyration) کو معرف کرسکتے ہیں۔یہ جسم کی کل کمیت اور اس کے جمودگردشہ سے منسلک ہے۔

جدول 7.1 پر غور کیجیے۔اس میں سبھی معاملوں میں ہم $I=Mk^2$ لکھ سکتے ہیں۔یہاں k کا بُعد لمبائی کے بُعد جیسا ہے۔کسی چھڑ کے لیے اس کے درمیانی نقطہ پر عمودی محور کے اطراف $k^2 = L^2/12$، یعنی $k^2 = L/\sqrt{12}$ ہے۔اسی طرح اپنے قطر کے اطراف کسی دائری ڈسک کے لیے $k=R/2$ ہوتا ہے۔لمبائی k گردشی محور اور جسم کی جیومیٹریائی خصوصیت ہوتی ہے۔اسے گھوم نصف قطر کہتے ہیں۔جسم کی گھوم نصف قطر کسی محور کے گرد اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ یہ محور سے اس کمیت نقطہ کا فاصلہ ہے، جس کمیت نقطہ کی کمیت کل جسم کی کمیت کے مساوی ہو اور جس کا، اس محور کے گرد، جمودگردشہ، کل جسم کے، اس محور کے گرد، جمودگردشہ کے مساوی ہو۔

اس طرح کسی استوار جسم کا جمودگردشہ، جسم کی کمیت، اس کی شکل اور سائز، گردشی محور کے اطراف کمیت کی تقسیم اور گردشی محور کے مقام اور تشریق کے تابع ہے۔

تعریف، مساوات (7.34)، سے اخذ کرسکتے ہیں کہ جمودگردشہ کے ابعاد $[M L^2]$ ہیں اور اس کی SI اکائی $kg\text{-}m^2$ ہے۔

جسم کے گردشی جمود کی پیمائش کی شکل میں اس نہایت اہم مقدار I کی خصوصیت کا نہایت عملی استعمال کیا جاتا ہے۔بھاپ انجن، آٹوموبائل انجن وغیرہ مشینیں جن کا استعمال گردشی حرکت پیدا کرنے میں کیا جاتا ہے، ان میں زیادہ جمودگردشہ کی ڈسک لگی ہوتی ہے جنھیں پروازی رفتار پہیہ (flywheel) کہتے ہیں۔زیادہ جمودگردشہ ہونے کے سبب پروازرفتار پہیہ، گاڑی کی چال میں اچانک کمی یا زیادتی میں رکاوٹ پیدا کرتا ہے۔یہ گاڑیوں میں دھیرے دھیرے تبدیلی ہونے دیتا ہے اور جھٹکے دار حرکتوں سے بچاؤ کرتا ہے۔اس طرح یہ گاڑی میں سفر کرنے والے مسافروں کو پرسکون اور بے رکاوٹ (smooth ride) حرکت فراہم کرنے میں مددگار ہوتا ہے۔

7.10 عمودی اور متوازی محور کے تھیوریم (Theorems of Perpendicular and Parallel Axes)

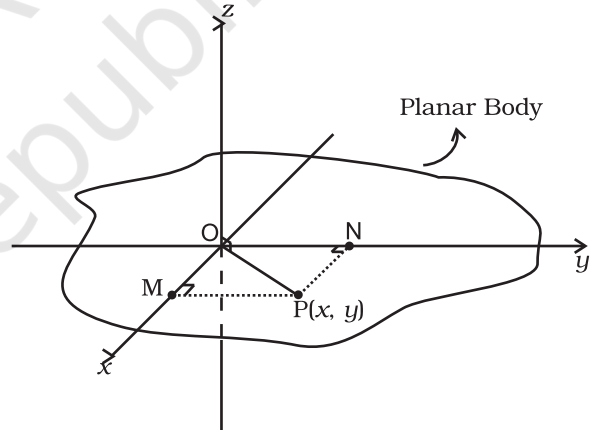
یہ دو کافی کارآمد تھیوریم جمودگردشہ سے متعلق ہیں۔ہم پہلے عمودی محور کے

جدول 7.1 کچھ مخصوص اجسام کے استمرار گردشہ

جسم	محور	شکل	I
پتلا دائری چھلا، نصف قطر R	قطر		$(\frac{1}{12})ML^2$
پتلا دائری چھلا، نصف قطر R	قطر		$\frac{MR^2}{2}$
پتلی چھڑ، لمبائی L	چھڑ کے عمودی وسطی نقطے پر		MR^2
دائری ڈسک (قرص)، نصف قطر R	قطر		$(\frac{1}{4})MR^2$
دائری ڈسک، نصف قطر R	مرکز پر ڈسک کے عمودی		$(\frac{1}{2})MR^2$
کھوکلا استوانہ، نصف قطر R	مرکز پر ڈسک کے عمودی		MR^2
ٹھوس سلنڈر، نصف قطر R	استوانہ کا محور		$(\frac{1}{2})MR^2$
گول کرّہ R نصف قطر R	قطر		$(\frac{2}{5})MR^2$

تھیوریم کے بارے میں گفتگو کریں گے اور کچھ باقاعدہ شکل والے اجسام پر سوالات حل کریں گے۔

7.10.1 عمودی محور کا تھیوریم (Theorem of Perpendicular axes)

یہ تھیوریم مستوی اجسام پر لاگو ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے یہ تھیوریم ایسے سپاٹ اجسام پر لاگو ہوتی ہے، جن کی موٹائی دوسرے ابعاد کے مقابلے کافی کم ہو (جیسے لمبائی، چوڑائی یا نصف قطر)۔شکل 7.29 اس تھیوریم کی وضاحت کرتی ہے۔اس تھیوریم کا بیان ہے کہ ایک مسطح جسم (ورقہ lamina) کا جمود گردشہ کسی محور کے گرد جو اس کے سطح سے عمودی سمت میں ہے دو دیگر ایسے محوروں کے گرد جمود گردشہ کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے جسم کے مستوی میں ہوں اور عمودی محور سے ہم نقطہ ہوں۔

شکل 7.29 مستوی جسم کے لیے عمودی محور کا تھیوریم ۔ xاور yعمودی محور ایک سطح میں ہیں اور z محور اسکے عمود میں ہے۔

شکل 7.29 مسطح جسم دکھاتی ہے۔z- محور نقطہ O سے گذرتا ہوا جسم کا عمودی محور ہے۔x- محور اور y- محور جو جسم میں واقع ہیں اور آپس میں ایک دوسرے پر عمود ہیں اور z- محور کے ہم نقطہ ہیں۔اس تھیوریم کے مطابق

$$I_z = I_x + I_y$$

اب ہم اس تھیوریم کا استعمال ایک مثال سے لیتے ہیں

مثال 7.10 ڈسک کا جمود گردشہ اس کے اپنے قطر کے گرد کیا ہے

شکل 7.30 قطر کے گرد ڈسک کا جمود گردشہ جب کہ اس کے مرکز سے گذرتے ہوئے عمودی محور کے گرد جمودِ گردشہ دیاھوا ھے۔

ہم مانتے ہیں کہ ڈسک کا جمود گردشہ ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے عمودی سمت میں ہے اور مرکز سے گذرتا رہا ہے، $MR^2/2$ ہے۔جہاں M ڈسک کی کمیت ہے اور R اس کا نصف قطر ہے (جدول 7.1)

ڈسک کو مسطح جسم مانا جاسکتا ہے۔اس لیے عمودی محور کی تھیوریم یہاں لاگو ہوگی۔جیسا کہ شکل 7.30 میں دکھایا گیا ہے ہم تین محور x، y اور z لیتے ہیں جو مرکز O سے گذرتے ہیں۔x، y محور ڈسک کے مستوی میں ہیں اور z- محور اس سے عمودی سمت میں ہے۔عمودی محور کی تھیوریم سے

$$I_z = I_x + I_y$$

اب x اور y محور ڈسک کے دو قطر کی جانب ہیں اور تشاکل کے ذریعے جمود گردشہ کسی بھی قطر کے گرد ایک ہی ہے۔اس لیے

$$I_x = I_y$$

اور

$$I_z = 2I_x$$

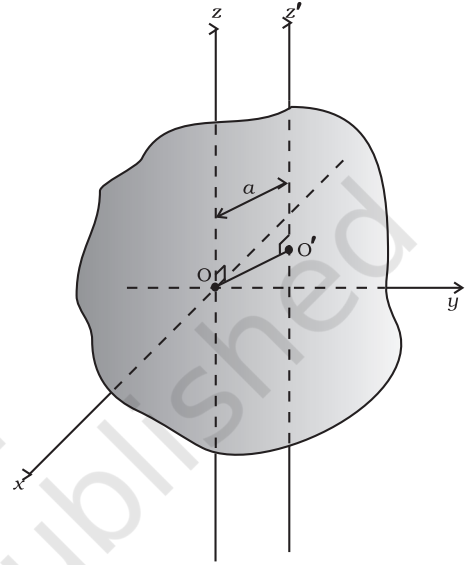
لیکن

$$I_z = MR^2/2$$

$$I_x = I_z/2 = MR^2/4$$

اس لیے

اس لیے ڈسک کا جمودِ گردشہ کسی بھی قطر کے گرد $MR^2/4$ ہے۔

اسی طرح رنگ (چھلّہ) کا جمودِ گردشہ کسی قطر کے گرد معلوم کریں۔کیا یہ تھیوریم ایک ٹھوس استوانہ کے لیے بھی لاگو ہوگی؟

شکل 7.31 متوازی محور کی تھیوریم z اور z' دو متوازی محورھیں جو a دوری پر ھیں۔ O جسم کا مرکز کمیت ھیں

$OO' = a$

7.10.2 متوازی محاور کی تھیوریم (Theorem of Parallel axes)

یہ تھیوریم ہر شکل کے جسم کے لیے استعمال ہوسکتی ہے۔ہم اس تھیوریم کو بغیر ثبوت پیش کئے ہوئے بیان کریں گے۔ ہم بہرحال اسے کچھ آسان حالات میں استعمال بھی کرکے دکھائیں گے۔یہ تھیوریم اس طرح بیان کی جاسکتی ہے۔

کسی محور کے گرد جمودِ گردشہ، اس کے متوازی کمیت مرکز سے گذرتے ہوئے محور کے گرد جمودِ گردشہ اور اس کی کمیت اور دونوں متوازی محوروں کے درمیان کی دوری کے مربع کے حاصل ضرب کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔جیسا کہ شکل 7.31 میں دکھایا گیا ہے، z اور z' دو متوازی محاور ایک دوسرے سے a دوری پر واقع ہے۔ z - محور استوار جسم کے مرکز کمیت O سے گذرتا ہے۔تب متوازی محاور کے تھیوریم کے مطابق

$$I_z' = I_z + Ma^2 \quad (7.37)$$

جہاں I_z اور $I_{z'}$ بالترتیب z اور z' کے گرد جسم کے جمودِ گردشہ ہیں۔ M جسم کی کل کمیت ہے اور a دونوں متوازی محاور کے درمیان کی عمودی دوری ہے۔

مثال 7.11 M کمیت اور l لمبائی کی کسی چھڑ کا، اس کے ایک سرے سے عمودی گزرنے والے محور کے اطراف جمودِ گردشہ کیا ہے؟

جواب M کمیت اور l لمبائی کے لیے $I = Ml^2/12$

متوازی محاور تھیوریم کے استعمال سے $I' = I + Ma^2$ جس میں $a = l/2$

$$I' = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

ہم اسے علاحدہ طور پر بھی جانچ سکتے ہیں۔چونکہ I ایسی چھڑ کا، جس کی کمیت 2M اور لمبائی 2l ہے۔اس کے وسطی نقطہ کے گرد، جمودِ گردشہ کا نصف ہے۔

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$

مثال 7.12 ایک رنگ (چھلّہ) کا جمودِ گردشہ رنگ کے دائرہ کے خط مماس کے گرد کیا ہے؟

جواب رنگ کی سطح میں رنگ پر خط مماس رنگ کے ایک قطر کے متوازی ہوتا ہے۔دونوں متوازی محوروں کے درمیان دوری R ہے۔متوازی محور کا تھیوریم استعمال کرنے پر

شکل 7.32

$$I_{tangent} = I_{dia} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

7.11 ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردشی حرکت کا مجردحرکیاتی عمل (Kinematics of Rotational Motion About a fixed Axis)

ہم پہلے گردشی حرکت اور خطی انتقالی حرکت کے درمیان مماثلت کا مطالعہ کر چکے ہیں۔مثال کے طور پر، گردشی حرکت میں زاویائی رفتار ω کی وہی اہمیت ہے جو خطی انتقالی حرکت میں خطی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی ہے۔ہم اس مماثلت کو مزید آگے بڑھانا چاہتے ہیں۔ایسا کرنے پر ہمیں اپنی گفتگو محض ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردش پر ہی رکھنی چاہیے۔اس طرح کی حرکت میں صرف واحد آزادی درجہ (degree of freedom) ہوتا ہے یعنی ایسی حرکت کو بیان کرنے کے لیے صرف ایک غیر تابع متغیرہ (variable) کی ضرورت ہوتی ہے۔یہ انتقالی حرکت میں خطی حرکت سے مطابقت رکھتا ہے۔یہ حصّہ صرف مجردحرکیات کی بحث تک محدود ہے۔ہم حرکی حرکیات کا مطالعہ اگلے حصہ میں کریں گے۔

گردشی جسم کے زاویائی نقل کے لیے ہم جسم پر ایک نقطہ P لیتے ہیں (شکل 7.33)۔جس مستوی میں جسم حرکت کررہا ہے، اسی مستوی میں اس کا زاویائی نقل θ مکمل جسم کا زاویائی نقل کہلاتا ہے۔θ، P کی حرکت کے مستوی میں ایک متعین سمت سے ناپا جاتا ہے جسے ہم x'- محور کہہ سکتے ہیں جو x- محور کے متوازی منتخب کیا گیا ہے۔یہ خیال رہے کہ گردش کا محور z- محور ہے اور حرکت x-y مستوی میں ہے۔شکل 7.33 بھی یہی دکھاتی ہے کہ t=0 پر زاویائی نقل θ_0 ہے۔

ہمیں یہ بھی یاد ہے کہ زاویائی رفتار، زاویائی نقل میں تبدیلی کی شرح ہے یعنی $\omega = d\theta/dt$ ۔یہ یاد رہے کہ چونکہ گردش کا محور متعین (جامد) ہے اس لیے زاویائی رفتار کو ایک سمتیہ کی طرح ماننے کی ضرورت نہیں ہے۔زاویائی اسراع $\alpha = d\omega/dt$ ہوگا۔

گردشی حرکت میں مجردحرکیاتی مقداریں: زاویائی نقل (θ)، زاویائی رفتار (ω) اور زاویائی اسراع (α) بالترتیب خطی حرکت میں مجردحرکیاتی مقداریں، نقل (x)، رفتار (v) اوراسراع (α) کے مطابق ہیں۔ہم خطی حرکت میں یکساں اسراع والی مجردحرکیاتی مساواتیں جانتے ہیں۔

$$v = v_0 + at \quad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{(b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \quad \text{(c)}$$

جہاں، ابتدائی نقل $=x_0$، ابتدائی رفتار $= v_0$۔ابتدائی کا مطلب ہے کہ t=0 پر ان کی مقداروں کی یہ قدر ہے۔

اسی طرح بالترتیب یکساں زاویائی اسراع کے ساتھ گردشی حرکت کے لیے مجردحرکیاتی مساوات ہیں

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (7.39)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (7.40)$$

جہاں، گردشی جسم کے لیے ابتدائی زاویائی نقل $=\theta_0$

جسم کی ابتدائی زاویائی رفتار ω_0

شکل 7.33 ایک استوار جسم کا زاویائی مقام دکھاتا ھے

مثال 7.13 پہلے اصول (First Principle) سے مساوات (7.38) حاصل کریں۔

جواب چونکہ زاویائی اسراع کے لیے ہے اس لیے

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{مستقلہ} \quad \text{(i)}$$

اس مساوات کا تکملہ (Integration) لینے پر

$$\omega = \int \alpha \, dt + c$$

$$= \alpha t + c \quad \text{(جہاں } \alpha \text{ ایک متعین عدد ہے)}$$

$t = 0$ پر، $\omega = \omega_0$ (دیا ہوا ہے)

(i) سے ہم پاتے ہیں کہ $t=0$ پر، $\omega = c = \omega_0$

اس لیے

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

تعریف: $\omega = d\theta/dt$ کے مطابق ہم مساوات (7.38) کا تکملہ کرنے پر مساوات (7.39) پاتے ہیں مساوات (7.39) اور مساوات (7.40) کی تصدیق ہم آپ کے لیے بہ طور مشق چھوڑ رہے ہیں۔

مثال 7.14 ایک موٹر پہیہ کی زاویائی چال 16 سیکنڈ میں 1200 rpm سے بڑھا کر 3120 rpm کر دی گئی ہے۔ (i) اسراع کو یکساں مانتے ہوئے یہ بتائیں کہ اس کی زاویائی اسراع کیا ہے؟ (ii) اس وقفۂ مدت میں انجن کتنی بار چکر لگائے گا؟

جواب (i) ہمیں $\omega = \omega_0 + \alpha t$ استعمال کرنی چاہیے

$\omega_0 =$ ابتدائی زاویائی چال (rad/s میں) =

$= 2\pi \times$ زاویائی چال (rev/s میں)

$$= \frac{2\pi \times \text{زاویائی چال (rev/min میں)}}{60 \text{ s/min}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 40\pi \text{ rad/s}$$

اسی طرح $\omega =$ آخری زاویائی چال (rad/s میں) $= \omega$

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 2\pi \times 52 \text{ rad/s}$$

$$= 104\pi \text{ rad/s}$$

زاویائی اسراع: $\alpha = (\omega - \omega_0)/t = 4\pi \text{ rad/s}^2$

انجن کا زاویائی اسراع $= 4\pi \text{ rad/s}^2$

(ii) وقفہ t میں زاویائی ہٹاؤ

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

چکر کی کل تعداد $= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$

7.12 ایک متعین محور (جامد) کے گرد گردشی حرکت کی حرکیاتی عمل (Dynamics of Rotational Motion About a Fixed Axis)

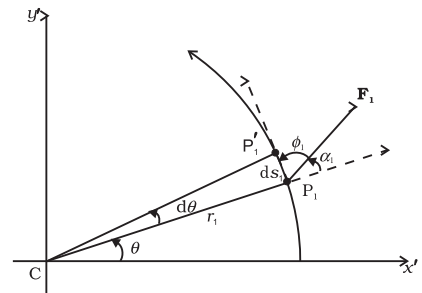
جدول 7.2 میں خطی حرکت سے منسلک کی مقداروں اور ان کے مماثل گردشی حرکت سے منسلک مقداروں کی ایک فہرست دی گئی ہے۔ ہم پہلے ہی دونوں قسم کی حرکتوں کی مجرد حرکیات کا موازنہ کر چکے ہیں۔ ہم جانتے ہیں گردشی حرکت میں جمود گردشہ اور قوت گردشہ کی وہی اہمیت ہے جو خطی حرکت میں، بالترتیب، کمیت اور قوت کی ہے۔ ہمیں جدول کی مدد سے یہ اندازہ لگا لینا چاہئے کہ دیگر مماثل مقداریں کیا ہیں۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ خطی حرکت میں کیا گیا کام Fdx ہے، ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردشی حرکت $\tau d\theta$ ہونا چاہیے چونکہ ہم جانتے ہیں $dx \rightarrow d\theta$ اور $F \rightarrow \tau$۔

لیکن پھر بھی یہ ضروری ہے کہ یہ مماثلتیں ٹھوس حرکی لحاظ سے حاصل کی جائیں۔اب ہم ایسا ہی کریں گے۔

شروع کرنے سے پہلے ہم یہ نوٹ کرسکتے ہیں کہ ایک متعین (جامد) محور کے گردگردشی حرکت کی حالت میں مسئلہ مقابلتاً سادہ ہوجاتا ہے۔ چونکہ محورمتعین (جامد) ہے اس لیے قوت گردشہ کے صرف اسی جز پر گفتگو کی ضرورت ہے جومحور کی سمت میں ہے۔صرف یہی جزمحور کے گردگردش پیدا کرتا ہے۔قوت گردشہ کا وہ جز جو گردش کے محور کی عمودی سمت میں ہے، محور کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے۔ہم خاص طور پر یہ مانتے ہیں کہ کچھ ایسی قوتیں بھی پیداہونا لازمی ہیں جوقوت گردشہ (بیرونی) کےعمودی جز کے اثر کوختم کرسکتی ہیں تاکہ محور کی متعین (جامد) حالت برقرار رہے۔اس لیے ابھی قوت گردشہ کےعمودی اجزا پر دھیان دینے کی ضرورت نہیں ہے۔اس کا مطلب ہے کہ استوارجسم کے قوت گردشہ کے تخمینہ کے لیے

(1) ہمیں صرف انھیں قوتوں کا لحاظ کرنے کی ضرورت ہے جومحور کے عمودی مستوی میں واقع ہیں۔وہ قوتیں جومحور کے متوازی ہیں محور کی عمودی سمت میں قوت گردشہ دیتی ہیں اورانھیں قوتِ گردشہ کی تحیب میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(2) ہمیں صرف انھیں مقام سمتیہ کے اجزاء کومعلوم کرنے کی ضرورت ہے جومحور کے عمودی ہیں۔محور کی سمت میں مقام سمتیہ کے اجزا جو ہیں، ان کے ذریعےقوت گردشہ پیدا ہونے والےمحور کےعمودی ہیں اورانھیں بھی شامل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

قوت گردشہ کےذریعہ کیا گیا کام (Workdone by a torque)

شکل 7.34 ایک متعین(جامد) محور کے گرد گردش کرتا ہوا ایک جسم جس کے ایک ذرہ پر لگی قوت F_1 کے ذریعہ کیا گیا کام دکھایا گیا ہے۔ذرّہ دائری راستہ پر حرکت کرتا ہے جس کا مرکز محور پر نقطہ C ہے۔چاپ P_1P_1 (ds_1) ذرّہ کا نقل بتاتا ہے۔

شکل 7.34 استوارجسم کا ترشہ دکھاتا ہے جو ایک متعین (جامد) محور کے گردگردش کررہا ہے، جسے ہم نے محور z- لیا ہے (صفحہ کے مستوی پر عمود ہے دیکھیں شکل 7.33)۔جیسا کہ اوپر بیان کیا جاچکا ہے ہمیں صرف انھیں قوتوں کو لینے کی ضرورت ہے جومحور کے عمودی مستوی میں واقع ہیں۔مان لیجیے F_1 ایک ایسی قوت ہے جو ذرّہ کے اوپر نقطہ P_1 پر لگ رہی ہے اوراس کا خطِ عمل (Line of action) جس مستوی میں ہے وہ محور پر عمود ہے۔آسانی کے لیے اسے ہم x'-y' مستوی (صفحہ کا مستوی) کہتے ہیں۔P_1 پر ذرّہ ایک دائری راستہ طے کرتا ہے جس کا نصف قطر r_1 ہے، مرکز C ہے۔

اس لیے $CP_1 = r_1$

وقفہ dt میں یہی نقطہ مقام P_1' پر حرکت کر جاتا ہے۔اس لیے ذرّہ کےنقل ds_1 کی عددی قدر: $ds_1 = r_1\ d\theta$ ہوگی۔اوراس کی سمت نقطہ P_1 پردائری راستے کے خط مماس کی سمت میں ہوگی۔یہاں $d\theta$ ذرہ کا زاویائی نقل ہے۔ $d\theta = \angle P_1CP_1'$ ہے۔ذرّہ پرلگی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام

$$dW_1 = \mathbf{F}_1\ d\mathbf{s}_1 = F_1 d\mathbf{s}_1 \cos\phi_1 = F_1\ (r_1\ d\theta)\ \sin\alpha_1$$

جہاں، ϕ_1، قوت $\mathbf{F}_1$ اورنقطہ P_1 پرخط مماس کے درمیان زاویہ ہے اور α قوت $\mathbf{F}_1$ اور نصف قطر سمتیہ $\mathbf{OP}_1$ کے درمیان زاویہ ہے: $\phi_1 + \alpha_1 90^0$ ۔

F_1 کے ذریعہ قوت گردشہ مبدے کے گرد $\mathbf{OP_1 \times F_1}$ ہے۔اب $\mathbf{OP_1 = OC + OP_1}$ (دیکھیں شکل (b) 7.17)۔چونکہ $\mathbf{OC}$ محور کی سمت میں ہے اس لیے اس سے پیدا شدہ قوت گردشہ کو ہم شامل نہیں کریں گے۔F_1 کے ذریعہ موثر قوت گردشہ $\boldsymbol{\tau_1 = CP \times F_1}$ ہے۔یہ گردش کے محور کی سمت میں ہے جس کی عددی قدر $\tau_1 = r_1F_1 \sin\alpha$ ہے۔اس لیے

$$dW = \tau_1 d\theta$$

اگر ایک سے زیادہ قوتیں جسم پر لگ رہی ہوں تو ان سب کے ذریعے کیے گئے کاموں کو جوڑکر کل کام حاصل کیا جاسکتا ہے۔اگر ہم مختلف قوتوں

کے قوتِ گردشہ کی نشاندہی علامتوں τ_1, τ_2 سے کریں تو

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + ...)d\theta \qquad (7.41)$$

خیال رہے کہ قوتیں جو قوت گردشہ پیدا کرتی ہیں مختلف ذرّات پر عامل ہوتی ہیں لیکن زاویائی نقل $d\theta$ سب ذرات کے لیے ایک ہی ہے۔ چونکہ شامل کیے گئے سبھی قوت گردشہ متعین (جامد) محور کے متوازی ہیں اس لیے کل قوت گردشہ τ کی عددی قدر انفرادی قوت گردشہ کی عددی قدروں کے الجبرائی جوڑ کے برابر ہوتی ہے۔یعنی کہ، $\tau = \tau_1, \tau_2$ اس لیے

$$dW = \tau d\theta$$

یہ مساوات جسم پر لگے کل (بیرونی) قوت گردشہ τ کے ذریعہ، ایک متعین محور کے گرد گردش کر رہے جسم پر کیے گئے کام کا پتا دیتا ہے۔اس کی مماثلت خطی حرکت میں کیے گئے کام کی عبارت ریاضیاتی عبارت سے واضح ہے۔

$$dw = Fds$$

مساوات (7.41) کے دونوں طرف dt سے تقسیم کرنے پر

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega \qquad (7.42)$$

یا

$$P = \tau\omega \quad (7.42)$$

یہ ساعتی (instantaneous) طاقت ہے۔ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردش حرکت کے لیے طاقت (Power) کی اس ریاضیاتی عبارت کا موازنہ خطّی حرکت کے لیے طاقت کی ریاضیاتی عبارت :

$$P = Fv$$

سے کیجیے۔

ایک کامل استوار جسم میں کوئی داخلی حرکت نہیں ہوتی ہے۔اس لیے بیرونی قوت گردشہ کے ذریعہ کیے گئے کام کا کوئی اصراف (Dissipation) نہیں ہوتا اور یہ کام حرکی توانائی میں اضافہ ہی کرتا رہتا ہے۔جسم پر کئے کیے کام کی شرح مساوات (7.42) سے حاصل ہوتی ہے۔اسے ہم حرکی توانائی میں اضافہ کی شرح کے یکساں مان سکتے ہیں۔حرکی توانائی میں اضافہ کی شرح ہوگی۔

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

ہم مان لیتے ہیں جمود گردشہ قوت کے ساتھ نہیں بدلتا۔اسکا مطلب

جدول 7.2.1 خطی انتقالی حرکت اور گردشی حرکت کے موازنہ میں مماثلت

خطی انتقالی حرکت	گردشی حرکت
1۔ نقل x	زاویائی نقل θ
2۔ رفتار $v = dx/dt$	زاویائی رفتار $\omega = d\theta/dt$
3۔ اسراع $a = dv/dt$	زاویائی اسراع $\alpha = d\omega/dt$
4۔ کمیت M	جمود گردشہ I
5۔ قوت $F = Ma$	قوت گردشہ $\tau = I\alpha$
6۔ کام $dW = Fds$	کام $W = \tau d\theta$
7۔ حرکی توانائی $K=Mv^2/2$	حرکی توانائی $K = I\omega^2/2$
8۔ طاقت $P = Fv$	طاقت $P = \tau\omega$
9۔ خطی میعارِ حرکت $p = Mv$	زاویائی میعارِ حرکت $L = I\omega$

ہے جسم کی کمیت تبدیل نہیں ہوتی۔ جسم استوار رہتا ہے اور جسم کے کی مناسبت سے محور اپنا مقام نہیں بدلتا ہے۔

چونکہ $\alpha = dw/dt$، ہم پاتے ہیں

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\alpha$$

کیے گئے کام اور حرکی توانائی میں اضافہ کی شرحوں کو برابر کرنے پر

$$\tau\,\omega = I\omega\alpha$$

$$\tau = I\alpha \qquad (7.43)$$

مساوات (7.43) خطی حرکت میں نیوٹن کے دوسرے کلیہ کے جیسا ہی ہے، جیسے علامتی طور پر ظاہر کرتے ہیں:

$$F = ma$$

ٹھیک اسی طرح جس طرح قوت اسراع پیدا کرتی ہے، قوت گردشہ زاویائی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زاویائی اسراع، لگائے گئے قوت گردشہ کے راست متناسب اور جمود گردشہ کے معکوس متناسب ہوتا ہے۔ مساوات (7.43) کو ہم ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردش کے لیے نیوٹن کا دوسرا کلیہ کہہ سکتے ہیں۔

مثال 7.15 ایک رسّی جس کی کمیت تقریباً صفر ہے پروازی پہیہ کے دھری پر لپٹی گئی ہے جس کی کمیت 20 kg اور نصف قطر 20 cm ہے۔ رسّی پر 25 N کی کھچاؤ قوت لگائی گئی ہے (شکل 7.35)۔ پروازی پہیہ بغیر رگڑ والے بیرنگ کے ساتھ افقی دھری پر اچھی طرح جما ہوا ہے۔

(a) پہیہ کا زاویائی اسراع معلوم کریں

(b) جب 2m رسی لپٹی ہو تو کھچاؤ قوت کے ذریعہ کیا گیا کام معلوم کریں۔

(c) اس نقطہ پر پہیہ کی حرکی توانائی بھی معلوم کریں۔ یہ مان لیجیے کہ پہیہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔

(d) حصّہ (b) اور (c) کے جواب کا موازنہ کریں۔

جواب

شکل **7.35**

(a) ہم استعمال کرتے ہیں $I\alpha$

قوت گردشہ $\tau = FR$

$= 25 \times 0.2$ NM $\quad (R = 0.20$ m$)$

$= 5.0$ Nm

I = اپنے محور کے گرد، پروازی پہیہ کا جمود گردشہ $= MR^2/2$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

زاویائی اسراع $= \alpha$

$= 5.0$ N m/0.4 kg m^2 = 12.35 s^2

(b) بغیر لپٹی 2 m رسّی کے اوپر لگی کھچاؤ قوت کے ذریعہ کیا گیا کام

(c) مان لیجیے ω اختتامی زاویائی رفتار ہے۔ $I\omega^2$ چونکہ پہیہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ اب

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$$

بغیر لپٹی رسّی کی لمبائی پہیے کا نصف قطر 8 زاوئی نقل

$= 2$m$/0.2$ m $= 10$ rad

$$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250 (\text{rad/s})^2$$

حاصل شدہ حرکی توانائی $= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50$ J

(d) دونوں جواب ایک ہی ہیں یعنی پہیہ کے ذریعہ حاصل شدہ حرکی توانائی = قوت کے ذریعہ کیا گیا کام، رگڑ کے ذریعہ توانائی ضائع نہیں ہورہی ہے۔

7.13 ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردشی حرکت میں زاویائی معیارِحرکت

(Angular Momentum in case of Rotation about a **fixed** axis)

ہم نے حصّہ 7.7 میں ذرّات کے نظام کے زاویائی معیارِحرکت کا مطالعہ کیا ہے۔ہم وہاں سے جانتے ہیں کہ ایک نقطہ کے گرد ذرّات کے نظام کے کل زاویائی معیارِحرکت کی شرح وقت اسی نقطہ کے لیے کیے گئے کل بیرونی قوت گردشہ کے برابر ہوتی ہے۔جب کل بیرونی قوت گردشہ صفر ہوتا ہے تو نظام کے کل زاویائی معیارِحرکت کی بقا ہوتی ہے۔

اب ہم ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردش کی مخصوص صورت میں زاویائی معیارِحرکت کا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔نظام کے کل زاویائی معیارِحرکت کے لیے عمومی ریاضیاتی عبارت ہے :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25\ b)$$

پہلے گردش کر رہے استوارجسم کے ایک ذرہ کا زاویائی معیارِحرکت لیتے ہیں۔پھر ہم مکمل جسم کا L حاصل کرنے کے لیے سبھی ذرّات کے انفرادی معیارِحرکت کو جمع کرتے ہیں۔

ایک مخصوص ذرّہ کے لیے $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ہے۔جیسا کہ پچھلے حصّہ میں ہم نے دیکھا ہے $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ [شکل 7.17 (b)] اور $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

$$\boldsymbol{l} = (\mathbf{OC} \times m\mathbf{v}) + (\mathbf{CP} \times m\mathbf{v})$$

نقطہ P پر ذرّہ کی خطی رفتار **v** کی عددی قدر $v = \omega r_\perp$ ہوگی۔جہاں $r_\perp$، CP کی لمبائی یا گردشی محور سے P کی عمودی دوری ہے۔مزید، **v**، نقطہ P پر اس دائرہ کا خط مماس ہے جو ذرہ طے کرتا ہے۔دائیں ہاتھ والے طریقہ کے ذریعہ یہ تصدیق کی جاسکتی ہے کہ **CP×v** متعین (جامد) محور کے متوازی ہے۔متعین محور کی جانب اکائی سمتیہ (z- محور ماننے پر) $\hat{\mathbf{k}}$ ہے۔اس لیے

$$\overrightarrow{\mathbf{CP}} \times m\,\vec{\mathbf{v}} = r_\perp (mv)\,\hat{\mathbf{k}}$$

(چونکہ $\mathbf{v} = \omega r_\perp$)

$$m\,\vec{\mathbf{v}} = r_\perp^{2}\,\omega\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v}$$

$$= m r_\perp^2 \omega\,\hat{\mathbf{k}}$$

اسی طرح ہم جانچ کرسکتے ہیں کہ **OC×v** متعین (جامد) محور پر عمود ہے۔متعین محور (z- محور) کی سمت میں l کو l_z سے دکھانے پر

$$\boldsymbol{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = m r_\perp^2 \omega\,\hat{\mathbf{k}}$$

اور

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_z + \mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}$$

l_z متعین (جامد) محور کے متوازی ہے جب کہ l نہیں ہے۔ عمومی طور پر ذرّہ کے لیے زاویائی معیارِحرکت l گردشی محور کی سمت میں نہیں ہوتا۔یعنی ایک ذرّہ کے لیے l اور ω لازمی طور پر متوازی نہیں ہوتے۔ خطّی انتقالی حرکت میں اس کی مماثل حقیقت سے موازنہ کیجیے۔ایک ذرّہ کے لیے **p** اور **v** ہمیشہ ہی آپس میں متوازی ہوتے ہیں۔

پورے استوارجسم کے کل زاویائی معیارِحرکت کی تحسیب کے لیے ہم جسم کے ہر ذرّہ کی زاویائی معیارِحرکت کو جوڑتے ہیں۔

اس لیے

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum l_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

ہم $\mathbf{L}_\perp$ اور $\mathbf{L}_z$ سے بالترتیب z- محور کے عمودی اور متوازی سمت میں L کے اجزاء کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i \qquad (7.44\ a)$$

جہاں m_i اور $\mathbf{v}_i$ بالترتیب i^{th} ذرّہ کی کمیت اور رفتار ہے اور C_i ذرّے کے ذریعے طے کیے گئے دائرہ کا مرکز ہے۔

$$\mathbf{L}_z = \sum \mathbf{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega\,\hat{\mathbf{k}}$$

یا

$$\mathbf{L}_z = I\omega\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44\ b)$$

یہ اس لیے کہ محور سے i^{th} ذرّہ کی عمودی دوری r_i ہے اور تعریف کے مطابق گردشی محور کے گرد جسم کا جمودِ گردشہ $I = \sum m_i r_i^2$ ہے۔

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$$

استوار جسم، جن سے ہم نے اس باب میں خاص طور پر بحث کی ہے، گردشی محور کے گرد متشاکل (Symmetric) ہوتے ہیں، یعنی کہ گردش کا محور ان کے تشاکل محاور میں سے ایک محور ہوتا ہے۔ $\overrightarrow{OC_i}$ کے لیے، ہر اس ذرّے کے لیے جس کی رفتار $\vec{v}_i$ ہے، $-\vec{v}_i$ رفتار کا ایک دوسرا ذرہ ہے، جو ذرّہ کے ذریعے طے کیے گئے مرکز C_i کے دائرہ پر قطری مخالف مقام پر ہوتا ہے۔ اس طرح کے جوڑوں کا $L_\perp$ میں مجموعی حصہ صفر ہوتا ہے۔ اس وجہ سے متشاکل اجسام کے لیے $\mathbf{L}_\perp$ صفر ہوتا ہے۔ اس طرح

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.22\ d)$$

ایسے اجسام کے لیے، جو گردشی محور کے گرد متشاکل نہیں ہیں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{L}_z$ دونوں برابر نہیں ہونگے۔ اسی لیے $\mathbf{L}$ گردشی محور کی سمت میں واقع نہیں ہوگا۔

جدول 7.1 کے حوالہ سے کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کن صورتوں میں $\mathbf{L}=\mathbf{L}_z$ نہیں ہوگا؟

مساوات (7.44 b) کا تفرق لینے پر، جس میں $\hat{\mathbf{k}}$ ایک متعین (مستقلہ) سمتیہ ہے۔

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(I\omega)\right)\hat{\mathbf{k}}$$

اب مساوات (7.28 b) کے مطابق

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

جیسا کہ ہم نے پچھلے حصہ میں دیکھا ہے متعین (جامد) محور کے گرد گردش میں، بیرونی قوت گردشہ کے صرف انھیں اجزا (components) کو لینے کی ضرورت ہے جو گردشی محور کی سمت میں ہیں۔ اس کا مطلب ہے $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$۔ چونکہ $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ اور $\mathbf{L}_z$ کی سمت (سمتیہ $\hat{\mathbf{k}}$) متعین ہے اس لیے متعین (جامد) محور کے گرد گردش کے لیے

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \tau\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.45\ a)$$

اور

$$\frac{d\mathbf{L}_\perp}{dt} = 0 \qquad (7.45\ b)$$

اس طرح، متعین (جامد) محور کے گرد گردش کے لیے متعین محور کی عمودی سمت میں زاویائی معیارِ حرکت کے اجزا مستقلہ ہوتے ہیں۔ کیونکہ $\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$ ہم مساوات (7.45 a) سے پاتے ہیں

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \qquad (7.45\ c)$$

اگر جمود گردشہ I وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا،

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

اور ہم مساوات (7.45 c) سے پاتے ہیں

$$\boldsymbol{\tau} = I\alpha \qquad (7.43)$$

ہم پہلے ہی یہ مساوات کام-حرکی توانائی کے ذریعہ حاصل کر چکے ہیں۔

7.13.1 زاویائی تحرک کی بقا (Conservation of angular momentum)

اب ہم اس مقام پر ہیں کہ ایک زاویائی معیارِحرکت کی بقا کے اصول کا مطالعہ متعین (جامد) محور کے گرد گردشی حرکت میں کرسکتے ہیں۔ مساوات (7.45 c) سے، اگر بیرونی قوت گردشہ صفر ہے تو

$$L_z = I\omega = \text{مستقلہ} \qquad (7.46)$$

متشاکل کل اجسام کے لیے، مساوات (7.44 d) سے، L_z کو L سے تبدیل کرسکتے ہیں (L اور L_z بالترتیب **L** اور $\mathbf{L_z}$ کی عددی قدریں ہیں)

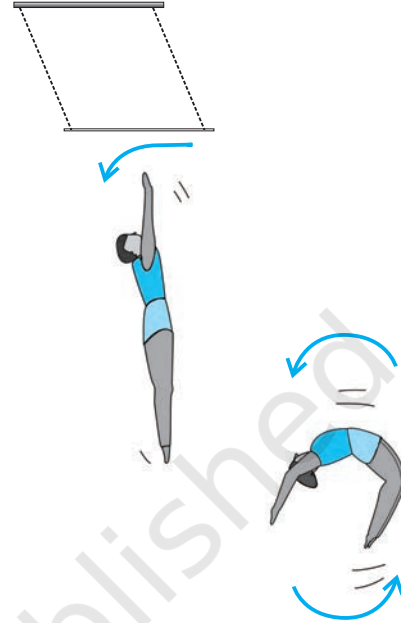
یہ مساوات (7.29 a) کی جامد محور کے گرد گردش کے لیے مطلوبہ شکل ہے جو ذرّات کے نظام کے زاویائی معیارِحرکت کی بقا کے اصول کو دکھاتی ہے۔ مساوات (7.46) کو ہم بہت ساری ایسی جگہوں پر استعمال کرسکتے ہیں جو روزمرّہ کی زندگی میں ہمیں دیکھنے کو ملتی ہیں۔ مندرجہ ذیل تجربہ آپ اپنے دوست کے ساتھ کرسکتے ہیں۔ آپ ایک گھومنے والی کرسی پر اپنے بازؤں کو موڑ کر اور پیروں کو بغیر زمین پر لگائے بیٹھ جائیں۔ آپ اپنے دوست سے کہیں کہ وہ کرسی تیز گھمائیں۔ جب کرسی کچھ زیادہ زاویائی چال سے گھومنے لگے آپ اپنے بازو کو افقی سمت میں پھیلائیے۔ کیا ہوتا ہے؟ آپ کی زاویائی چال کم ہونے لگتی ہے۔ اگر آپ اپنے بازو کو اپنے جسم کے قریب لائیں تو زاویائی چال دوبارہ بڑھ جاتی ہے۔ یہ وہ حالت ہے جہاں زاویائی معیارِحرکت کی بقا کے اصول کو ہم استعمال کرسکتے ہیں۔ اگر گردشی نظام میں رگڑ کو نہ لیا جائے تو کرسی کے گردشی محور کے گرد کوئی بیرونی قوت گردشہ نہیں ہوگا اور اس لیے $I\omega$ مستقلہ ہوگا۔ بازو کو بازو کو پھیلانے پر گردشی محور کے گرد I بڑھ جاتا ہے جس سے زاویائی چال ω کم ہوجاتی ہے۔ بازو کو جسم کے قریب لانے پر مخالف اثر ہوتا ہے۔

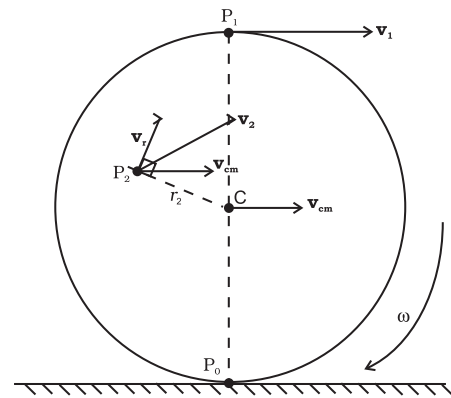
شکل 7.36 (a) زاویائی معیارِحرکت کی بقا کا مظاہرہ۔ ایک لڑکی گھومتی ہوئی کرسی پر بیٹھ کر اپنے بازو کو پھیلاتی ہے موڑ کر اپنے جسم کے قریب لاتی ہے۔

ایک سرکس کرتب باز اور غوطہ خور اس اصول کا فائدہ اٹھاتا ہے۔ اسکیٹنگ، کلاسیکی ہندوستانی یا مغربی انداز کے رقاص ایک پیر کے انگوٹھے سے اپنے فن کا مظاہرہ اس اصول کی بنیاد پر ہی کرتے ہیں۔ کیا آپ اس کی تشریح کرسکتے ہیں؟

7.14 لڑھکن حرکت (Rolling Motion)

ایک بہت ہی عام حرکت جسے ہم روزمرّہ کی زندگی میں اکثر مشاہدہ کرتے رہتے ہیں وہ لڑھکن حرکت ہے۔ سواری میں استعمال ہورہے سارے ہی پہیے لڑھکن حرکت میں ہوتے ہیں۔ اسے سمجھنے کے لیے ہم ایک ڈسک کی مثال لیتے ہیں۔ لیکن یہ نتیجہ ان سارے ہی ہموار اجسام پر لاگو ہوتا ہے جو ایک مستوی میں لڑھکن حرکت کرتے ہیں۔ ہم مانتے ہیں کہ ڈسک بغیر پھسلن کے لڑھکتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ کسی ساعت میں ڈسک کا

نچلا حصّہ جو سطح کو چھو رہا ہے سطح پر حالت سکون میں ہے۔

شکل 7.36 (b) ایک کرتب باز اپنا تماشہ دکھاتے ہوئے معیارِ حرکت کی بقا کے قانون کا استعمال کررہا ہے۔

ہم پہلے ہی کہہ چکے ہیں کہ لڑھکن حرکت میں گردشی اور خط انتقال حرکت ہے۔ہم جانتے ہیں کہ ذرّات کے نظام کی خط انتقال حرکت مرکز کمیت کی حرکت ہے۔

شکل 7.37 ہموار مستوی پر ڈسک کی لڑھکن حرکت (بغیر پھسلن کے)۔خیال رہے کہ کسی ساعت پر سطح کے ساتھ ڈسک کا نقطہ اتصال P_0 حالت سکون میں ہے۔ڈسک کا کمیت مرکز $\mathbf{v}_{cm}$ رفتار سے چل رہا ہے۔ڈسک محور کے گرد زاویائی چال ω کے ساتھ گردش کرتی ہے جو C سے گذرتا ہے۔ $\mathbf{v}_{cm} =$ Rω ، جہاں R ڈسک کا نصف قطر ہے۔

مان لیجیے $\mathbf{v}_{cm}$ کمیت مرکز کی رفتار ہے اور اس لیے ڈسک کی خطی رفتار ہے۔چونکہ لڑھکن کرتی ہوئی ڈسک کا کمیت مرکز اس کے جیومیٹریائی مرکز C (شکل 7.37) پر ہے۔ $\mathbf{v}_{cm}$، C کی رفتار ہے۔ یہ ہموار سطح کے متوازی ہے۔ڈسک کی گردشی حرکت متاشاکل محور کے گرد ہے جو C سے گذرتا ہے۔اس لیے ڈسک کے کسی بھی نقطہ کی رفتار جیسے P_0، P_1 یا P_2 کی رفتار اجزا پر مشتمل ہوتی ہے۔ایک خطی انتقالی رفتار $\mathbf{v}_{cm}$ ہے اور دوسری گردش کی وجہ سے خطی رفتار υ_r ہے۔ $\mathbf{v}r$ کی عددی قدر $\upsilon_r = r\omega$ ہے جہاں ω ڈسک کی محور کے گرد زاویائی رفتار ہے اور r محور سے دوری ہے (C سے)۔ رفتار $\mathbf{v}_r$ کی سمت نصف قطر سمتیہ کے عمود میں ہے۔شکل 7.37 میں نقطہ P_2 کی رفتار $(\mathbf{v}_2)$ اور اس کے اجزاء $\mathbf{v}_r$ اور $\mathbf{v}_{cm}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\mathbf{v}_r$، CP_2 پر عمود ہے۔یہ دکھانا آسان ہے کہ $\mathbf{v}_z$ خط $P_0 P_2$ پر عمود ہے۔اس لیے وہ خط جو P_0 سے گذر رہا ہے اور ω کے متوازی ہے، گردش کا لمحاتی محور کہلاتا ہے۔

P_0 پر، خط انتقال رفتار $\mathbf{v}_r$ سے گردش کی وجہ سے خطی رفتار $\mathbf{v}_{cm}$ کے بالکل مخالف سمت میں ہے۔مزید، $\mathbf{v}_r$ کی عددی قدر Rω ہے۔جہاں R ڈسک کا نصف قطر ہے۔اس لیے، ڈسک کے بنا پھسلن کے لڑھکنے کی شرط

$$\mathbf{v}_{cm} = R\omega \qquad (7.47)$$

اس کا مطلب ہے کہ ڈسک کے اوپری حصّہ پر نقطہ P_1 کی رفتار $(\mathbf{v}_1)$ کی عددی قدر $\mathbf{v}_{cm} + R\omega$ یا $2\upsilon_{cm}$ ہوگی اور اس کی سمت ہموار مستوی کے متوازی ہوگی۔ شرط (7.47) ساری لڑھکن حرکت کے لیے استعمال ہوتی ہے۔

7.14.1 لڑھکن حرکت کی حرکی توانائی (Kinetic Energy of Rolling Motion)

ہمارا دوسرا کام یہی ہوگا کہ لڑھکن حرکت کرتے ہوئے جسم کے لیے حرکی توانائی کے لیے ایک فارمولہ حاصل کریں۔لڑھکن جسم کی حرکی توانائی کو ہم

خطی حرکی توانائی اور گردشی حرکی توانائی میں الگ کرسکتے ہیں۔ یہ ذرّات کے نظام کے لیے ایک مخصوص حالت ہے جس کے مطابق ذرّات کے نظام کی حرکی توانائی (K) کو مرکز کمیت کی حرکی توانائی $(mv^2/2)$ اور ذرّات کے نظام کے مرکز کمیت کے گرد گردشی حرکت کی حرکی توانائی (K') میں الگ کرسکتے ہیں۔ اس لیے

$$K = K' + Mv^2/2 \qquad (7.48)$$

ہم اس عام نتیجہ کو مان لیتے ہیں (دیکھیں مشق 7.31) اور اسے لڑھکن حرکت کی حالت میں استعمال کرتے ہیں۔ مرکز کمیت کی حرکی توانائی یعنی لڑھکن جسم کی خطی حرکی توانائی $mv^2_{cm}/2$ ہوگی۔ جہاں m جسم کی کمیت اور v_{cm} مرکز کمیت رفتار ہے۔ چونکہ مرکز کمیت کے گرد لڑھکن جسم کی حرکت گردشی حرکت ہے اس لیے K' جسم کی گردشی حالت کی حرکی توانائی بتاتا ہے اور $K'=I\omega^2/2$ جہاں I مناسب محور کے گرد جمود گردشہ ہے جو لڑھکن جسم کا متشاکل محور ہے۔ لڑھکن جسم کی حرکی توانائی

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2_{cm} \qquad (7.49\ a)$$

$v_{cm} = R\omega$ اور $I = m\,k^2$ رکھنے پر جہاں k جسم کا گھوم نصف قطر اور ہے۔ اب

$$K = \frac{1}{2}\frac{mk^2v^2_{cm}}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2_{cm}$$

یا

$$K = \frac{1}{2}mv^2_{cm}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) \qquad (7.49\ b)$$

مساوات (7.49 b) کسی بھی لڑھکن جسم ڈسک، استوانہ، رنگ (چھلّہ) یا کرّہ کے لیے استعمال کرسکتے ہیں۔

مثال 7.16 تین اشیاء ایک رنگ، ایک ٹھوس سلنڈر اور ایک ٹھوس کرّہ ایک مائل سطح پر بغیر پھسلن کے نیچے کی طرف لڑھک رہے ہیں۔ یہ حالت سکون سے حرکت میں آتے ہیں۔ ان کے نصف قطر ایک جیسے ہیں۔ کون سی شئے زمین پر سب سے تیز رفتار کے ساتھ پہنچے گی؟

جواب ہم لڑھکن جسم کے توانائی کی بقا کے اصول کا استعمال کرتے ہیں یعنی رگڑ وغیرہ کے ذریعہ کوئی توانائی ضائع نہیں ہو رہی ہے۔ مائل سطح پر نیچے کی طرف لڑھکتے ہوئے جسم کے ذریعہ توانائی بالقوۃ کا نقصان (= mgh) حرکی توانائی کے فائدہ کے برابر ہونا چاہئے (شکل 7.38)۔ چونکہ جسم حالت سکون سے حرکت شروع کرتے ہیں۔ چونکہ جسم حالت سکون سے حرکت شروع کرتے ہیں اس لیے حرکی توانائی میں فائدہ جسم کی افتتاحی حرکی توانائی کے برابر ہوگا۔ مساوات (7.49 b) سے،

$K = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$ جہاں v جسم کی (کمیت مرکز کی) اختتامی رفتار ہے۔ اب k اور mgh کو برابر کرنے پر

شکل 7.38

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

یا

$$v^2 = \left(\frac{2gh}{1+k^2/R^2}\right)$$

نوٹ کریں یہ لڑھکن جسم کی کمیت کے تابع نہیں ہے۔

رنگ (چھلّہ) کے لیے $k^2 = R^2$ رکھنے پر

$$v_{\text{رنگ}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}}$$

$$= \sqrt{gh}$$

ڈسک کے لیے $k^2 = R^2/2$ رکھنے پر

$$v_{\text{ڈسک}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

ٹھوس کرّے کے لیے $k^2 = 2R^2/5$ رکھنے پر

$$v_{\text{گولا}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+2/5}}$$

$$= \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

حاصل شدہ نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ تینوں اجسام میں درمیان کرّہ کے کمیت مرکز کی سب سے زیادہ اور رنگ کی سب سے کم رفتار مائل سطح کے نچلے حصّہ پر، ہے۔

مان لیجیے جسم کی کمیت یکساں ہے تو کون سے سی شئے جسم کی سب سے زیادہ گردشی حرکی توانائی ہوگی جب مائل سطح سے لڑھک کر بالکل نیچے سطح پر پہنچ چکی ہیں؟

خلاصہ

1۔ ایک مثالی استوارِ جسم وہ ہوتا ہے جس کے مختلف ذرّات کی آپسی دوریوں میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی، گرچہ ان ذرّات پر قوتیں لگ رہی ہوتی ہیں۔

2۔ ایک استوارِ جسم جب ایک نقطہ پر یا ایک خط پر جڑا ہوتا ہے تو صرف گردشی حرکت ہی عمل میں آتی ہے۔ اگر استوارِ جسم کسی طرح جڑا ہوا نہ ہو تو یا تو خالص خطی انتقال یا خطی انتقال اور گردش دونوں ہونگے۔

3۔ متعین (جامد) محور کے گرد گردش میں استوارِ جسم کا ہر ذرّہ ایک دائرہ میں حرکت کرتا ہے ایسے مستوی میں واقع ہوتا ہے جو محور کے عمودی ہو اور اس دائرہ کا مرکز محور پر ہوتا ہے۔ گردشی استوار جسم کے ہر نقطہ کسی بھی ساعت پر، زاویائی رفتار یکساں ہوتی ہے۔

4۔ خالص خطی انتقال میں جسم کا ہر ذرّہ کسی بھی ساعت پر یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔

5۔ زاویائی رفتار سمتیہ ہے۔ اس کی عددی قدر: $\omega = d\theta/dt$ ہے اور اس کی سمت گردشی محور کی جانب ہوتی ہے۔ ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردش کے لیے سمتیہ ω ایک متعین سمت میں ہوتا ہے۔

6۔ دو سمتیہ **a** اور **b** کا سمتی یا کراس حاصلِ ضرب $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ لکھا جاتا ہے۔ اس کی عددی قدر $ab\ \sin\theta$ ہے اور سمت دائیں ہاتھ والے اصول سے معلوم کی جاتی ہے۔

7۔ ایک متعین (جامد) محور کے گرد گردش کرتے ہوئے استوارِ جسم کے ذرّہ کی خطی رفتار $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ ہے جہاں r، متعین (جامد) محور پر ایک مبدا کے لحاظ سے ذرّہ کا مقام سمتیہ ہے۔ یہ استوارِ جسم کے لیے بھی لاگو ہوتا ہے جو ایک جامد نقطہ کے گرد گردش کر رہا ہے۔ اس حالت میں r ذرّہ کا مقام سمتیہ ہے جو مبدہ سے ناپا جاتا ہے۔

8۔ ذرّات کے نظام کے کمیت مرکز کی تعریف ہے: مرکز کمیت کو اس طرح کہا جاتا ہے وہ نقطہ جس کا مقام سمتیہ ہے:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

9۔ ذرّات کے نظام کے مرکز کمیت کی رفتار $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$ ہوتی ہے، جہاں **P** نظام کا خطی معیارِ حرکت ہے۔ مرکز کمیت اس طرح حرکت کرتا ہے جیسے نظام کی پوری کمیت اس نقطہ پر مرکوز ہو اور اس پر ساری بیرونی قوتیں لگ رہی ہوں۔ اگر نظام پر کل بیرونی قوت صفر ہو تو نظام کا کل خطی معیارِ حرکت مستقلہ ہوتا ہے۔

10۔ n ذرّات کے نظام کے لیے مبدہ کے گرد معیارِ حرکت ہوتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

n ذرّات کے نظام کے لیے منبع کے گرد قوتِ گردشہ ہوتا ہے

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

قوت F_i جو i^{th} ذرّہ پر لگ رہی ہے اس میں بیرونی اور داخلی قوتیں شامل ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے نیوٹن تیسرا کلیہ لاگو ہوتا ہے اور دو ذرّات کے بیچ لگی قوت ان کو سمت میں ہوتی ہے ملانے والے خط کی ہم دکھا سکتے ہیں $\tau_{int} = 0$ اور

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$

11۔ ایک استوارِ جسم میکانکی توازن میں ہوتا ہے اگر

(i) یہ خطی توازن میں ہے یعنی کل بیرونی قوت صفر ہے، $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ اور

(ii) یہ گردشی توازن میں ہے یعنی کل بیرونی قوت گردشہ صفر ہے، $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$

12۔ جسم کا مادی کشش مرکز وہ نقطہ ہے جہاں جسم پر کل مادی کشش قوت گردشہ صفر ہے۔

13۔ ایک متعین محور کے گرد استوارِ جسم کے جمودِ گردشہ $I = \sum m_i r_i^2$ سے دکھایا جاتا ہے۔ جہاں r_i، i_{th} ذرّہ کی محور سے عمودی دوری ہے۔ گردش کی حرکی توانائی $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ ہے۔

14۔ متوازی محور کا تھیورم $I_z' = I_z + Ma^2$، ہمیں استوارِ جسم کا جمودِ گردشہ ایک محور کے گرد بتاتا ہے۔ کسی بھی محور کے گرد جسم کا جمودِ گردشہ جسم کے مرکز کمیت سے گذرتے ہوئے محور جمودِ گردشہ جو متوازی محور کے گرد جمودِ گردشہ اور کمیت اور دونوں محوروں کے بیچ کی عمودی دوری کے مربع کے حاصل ضرب کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

15۔ ایک متعین محور کے گرد گردش اور خطی حرکت میں بہت مماثلت تجرد حرکیات اور حری حرکیات عمل کے لحاظ سے۔

16۔ ایک متعین محور کے گرد گردش کرتے ہوئے استوارِ جسم کی زاویائی اسراع $\tau = I\alpha$ ہے۔ اگر بیرونی قوت گردشہ صفر ہے تو زاویائی تحرک کے اجزاء ایک متعین محور کے گرد $(I\omega)$ ایسی گردشی جسم کے لیے مستقل ہوتا ہے۔

17۔ بغیر پھسلن کے لڑھکن حرکت میں $v_{cm} = R\omega$ ہوتا ہے۔ جہاں v_{cm} خطی رفتار ہے (یعنی مرکز کمیت کا)، R نصف قطر ہے اور m جسم کی کمیت ہے۔ اس طرح کے لڑھکن جسم کے لیے حرکی توانائی خطی اور گردشی حرکی توانائی کا جوڑ ہوتا ہے۔

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

طبیعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	تبصرہ
زاویائی رفتار	ω	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}	**v = w × r**
زاویائی تحرک	τ	$[ML^2T^{-1}]$	J s	**L = r × p**
قوت گردشہ	T	$[ML^2T^{-2}]$	N m	**T = r × F**
جمودی گردشہ	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_{i\perp}^2$

قابل غور نکات

1۔ نظام کے مرکز کمیت کی حرکت معلوم کرنے کے لیے نظام کے داخلی قوتوں کی جانکاری ضروری نہیں ہے۔ اس مسئلہ کے لیے ہمیں جسم پر صرف بیرونی قوتوں کا جاننا ضروری ہے۔

2۔ ذرّات کے نظام کی حرکت کو الگ کرنے پر مرکز کمیت کی حرکت، نظام کی خطی حرکت اور نظام کے مرکز کمیت کے گرد حرکت ملتی ہے جو ذرّات کے نظام کے حری حرکیاتی عمل کو سمجھنے کے لیے ایک موزوں طریقہ ہے۔
ایک اس کی مثال ذرات کے نظام کی حرکی توانائی k کو الگ کرنے پر مرکز کمیت کے گرد حرکی توانائی 'k اور مرکز کی حرکی توانائی $MV^2/2$ ملتی ہے۔

3۔ ایک مخصوص شکل جسم (یا ذرّات کے نظام) کے لیے نیوٹن کا دوسرا کلیہ منحصر کرتا ہے نیوٹن کے دوسرے کلیہ اور تیسرے کلیہ پر۔

4۔ ذرّات کے نظام کے کل زاویائی تحرک میں تبدیلی کی شرح نظام میں کل بیرونی قوت گردشہ کے برابر ہوتی ہے۔ اس لیے ہمیں نیوٹن کا دوسرا اور تیسرا کلیہ کی ضرورت پڑتی ہے جس کے مطابق دو ذرّات کے بیچ لگی قوت ذرّات کو ملانے والی لائن کے سمت میں ہی ہوتی ہے۔

5۔ کل بیرونی قوت اور کل بیرونی قوت گردشہ صفر کرنے پر ایک آزاد شرط ملتا ہے۔ ہم ایک شرط کا استعمال دوسرے کے بغیر کر سکتے ہیں۔ کسی قوت جفت میں، کل بیرونی صفر ہوتی ہے لیکن کل قوت گردشہ غیر صفر ہوتی ہے۔

6 ذرّات کے نظام پر لگی کل قوت گردشہ منبع سے آزاد ہوگی اگر کل بیرونی قوت صفر ہو۔

7۔ جسم کا مرکز ثقل، مرکز کمیت سے ہی ہوتا ہے اگر ثقلی میدان میں کوئی تبدیلی جسم کے ایک ۔۔۔؟

8۔ زاویائی تحرک L اور زاویائی رفتار ω ضرور طور پر متوازی سمتیہ نہیں ہیں۔ بہرحال ایک آسان حالت میں جب ایک متعین محور کے گرد گردش ہو جو استوارِ جسم کا ہم شکل محور ہے اس میں تعلق L=Iω گو ہوگا۔ جہاں I جسم کا جمودِ گردشہ گردشی محور کے گرد ہے۔

مشق

7.1 یکساں کمیت کثافت کے درج ذیل اجسام میں ہر ایک کی کمیت مرکز کا وقوع لکھیے (a) گولا (کرہ) (b) سلنڈر (c) چھلاّ اور (d) مکعب۔ کیا کسی جسم کا کمیت مرکز لازمی طور پر اس جسم کے اندر واقع ہوتا ہے؟

7.2 HCl مالیکول میں دو ایٹموں کے نیوکلیس کے درمیان علاحدگی تقریباً 1.27 Å $(1 Å = 10^{-10} m)$ ہے۔ اس مالیکول کا کمیت مرکز کا تقریبی وقوع معلوم کیجیے۔ یہ معلوم ہے کہ کلورین کا ایٹم ہائیڈروجن کے ایٹم کے مقابلے 35.5 گنا بھاری ہوتا ہے اور کسی ایٹم کی کل کمیت اس کے نیوکلیس پر مرتکز ہوتی ہے۔

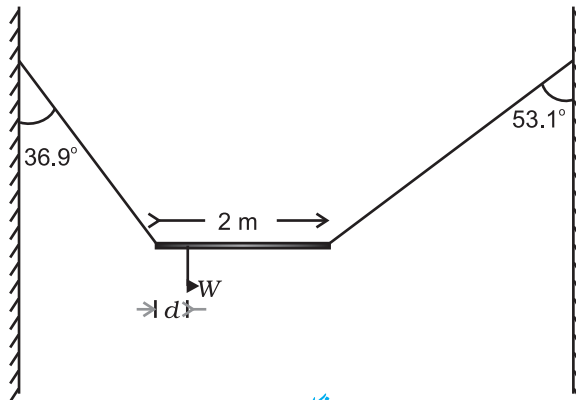
7.3 کوئی بچہ کسی ہموار افقی فرش پر یکساں چال v سے متحرک کسی لمبی ٹرالی کے ایک سرے پر بیٹھا ہے۔ اگر بچہ کھڑا ہو کر ٹرالی پر کسی بھی طرح سے دوڑنے لگتا ہے، تب (ٹرالی + بچہ) نظام کی کمیت مرکز کی چال کیا ہے؟

7.4 ثابت کیجیے کہ سمتیہ **a** اور **b** کے درمیان مثلث کا رقبہ **a×b** کے مقدار کا آدھا ہوتا ہے۔

7.5 ثابت کیجیے کہ **a.(b×c)** کی مقدار اور تین سمتیہ **a**، **b** اور **c** سے بنی متوازی بیلن (parallelopiped) کا حجم دونوں ایک ہی ہے۔

7.6 ذرّات کے زاویائی تحرک l کے اجزاء x، y، z محور میں ہیں اور تحرک p اجزاء p_x، p_y اور p_z ہیں۔ یہ دکھائیں کہ اگر ذرّات صرف x-y سطح میں ہی حرکت کرتے ہیں تو زاویائی تحرک صرف z- اجزاء کی ہی ہوگی۔

7.7 دو ذرّات جس کی کمیت m اور رفتار v ہے۔ متوازی لائن کی طرف مخالف سمت میں چل رہے ہیں اور d دوری پر واقع ہیں۔ یہ دکھائیں کہ دو ذرّات کے نظام کا سمتیہ زاویائی تحرک ایک ہی ہے خواہ کسی بھی نقطہ کے گرد زاویائی تحرک لی جائے۔

7.8 ایک غیر یکساں چھڑ جسکا وزن w حالت سکون میں دو دھاگہ (کمیت تقریباً صفر) کے ذریعہ لٹکایا گیا (شکل 7.39)۔ دھاگہ کے ذریعہ بنایا گیا زاویہ عمود سے بالترتیب 36.9° اور 53.1° ہے۔ چھڑ 2 m لمبی ہے چھڑ کا مرکز ثقل بائیں ہاتھ کی طرف سے دوری d معلوم کریں۔

شکل 7.39

7.9 ایک کار کی کمیت 1800 kg ہے۔اس کے اگلے اور پچھلے دھوری کی درمیانی دوری 1.8 m ہے۔اس کا مرکز ثقل اگلے دھوری سے پیچھے کی جانب 1.05 ہے۔ہموار میدان کے ذریعہ لگی قوت اگلے اور پچھلے پہیہ پر کیا ہوگی۔

7.10 (a) ایک گولا کا جمود گردشہ گولا کے خط مماس کے گرد معلوم کریں۔دیا گیا ہے کہ گولا کا جمود گردشہ قطر کے گرد $2\ MR^2/5$ ہے جہاں M گولا کی کمیت ہے اور R گولا کا نصف قطر ہے۔

(b) ایک ڈسک کا جمود گردشہ کسی بھی قطر کے گرد $MR^2/4$ ہے جہاں M کمیت اور R نصف قطر ہے اس کا جمود گردشہ ایک محور جو ڈسک سے عمودی سمت میں ہے اور اس کے کنارہ پر واقع نقطہ سے گذرتی ہے، معلوم کرو۔

7.11 ایک ٹھوس گولا اور ایک کھوکھلا سلنڈر جس کی کمیت اور نصف قطر یکساں ہے، پر برابر مقدار کی قوت گردشہ لگ رہی ہے۔سلنڈر اپنے ہم شکل محور کے گرد گردش کے لیے آزاد ہے اور گولا ایک محور جو مرکز سے گذرتا ہے کے گرد گردش کے لیے آزاد ہے۔ان دونوں میں سے کون ایک وقفہ مدت کے بعد زیادہ زاویائی چال حاصل کرے گی۔

7.12 20 kg کمیت کا کوئی ٹھوس سلنڈر اپنے محور کے اطراف $100\ rad\ s^{-1}$ کی زاویائی چال سے گردش کر رہا ہے۔سلنڈر کا نصف قطر 0.25 m ہے۔سلنڈر کی گردش سے متعلق حرکی توانائی کیا ہے؟ سلنڈر کے اپنے محور کے اطراف زاویائی تحرک کی قدر کیا ہے؟

7.13 (a) کوئی بچہ کسی ٹرن ٹیبل کے مرکز پر اپنے دونوں بازوؤں کو باہر کی جانب پھیلا کر کھڑا ہے۔ٹرن ٹیبل کو 40 rev/min کی زاویائی چال سے گردش کرائی جاتی ہے۔اگر بچہ اپنے ہاتھوں کو واپس سکوڑ کر اپنا جمود گردشہ اپنے ابتدائی جمود گردشہ سے 2/5 گنا کر لیتا ہے تو اس صورت میں اس کی زاویائی چال کیا ہوگی؟ یہ مانیے کہ ٹرن ٹیبل کی گردشی حرکت رگڑ سے پاک ہے۔

(b) یہ دکھائیے کہ بچے کی گردش کی نئی حرکی توانائی اس کی ابتدائی گردش کی حرکی توانائی سے زیادہ ہے۔آپ حرکی توانائی میں ہوئے اس اضافے کی تشریح کس طرح کریں گے؟

7.14 3 kg کمیت اور 40 cm نصف قطر کے کسی کھوکھلے سلنڈر پر نظر انداز کمیت کی رسی لپیٹی گئی ہے۔اگر رسی کو 30 N قوت سے کھینچا جائے تو سلنڈر کا زاویائی اسراع کیا ہوگا؟ رسی کا خطی اسراع کیا ہے؟ یہ مانیے کہ اس معاملے میں کوئی پھسلن نہیں ہے۔

7.15 کسی روٹر (rotor) کی $200\ rad\ s^{-1}$ کی یکساں زاویائی چال بنائے رکھنے کے لیے ایک انجن کے ذریعے 180 N m کا قوت گردشہ ترسیل کرنا ضروری ہوتا ہے۔انجن کے لیے ضروری طاقت معلوم کیجیے۔(نوٹ: رگڑ کی غیر موجودگی میں یکساں زاویائی رفتار ہونا اس بات کی دلالت

7.16 نصف قطر R والے یکساں ڈسک سے ایک گول سوراخ جس کا نصف قطر R/2 ہے مانا گیا ہے۔سوراخ کا مرکز اصل ڈسک کے مرکز سے R/2 دوری پر ہے۔اس جسم کا مرکز ثلق معلوم کریں۔

7.17 ایک میٹر چھڑا اپنے مرکز پر دھاری دار چیز پر متوازن حالت میں ٹکا ہوا ہے۔جب 5 g کا دوسکہّ ایک کے اوپر ایک 12 cm نشان پر رکھا گیا ہے تو چھڑا اس حالت میں 45.0 cm پر متوازن ہوتا ہے۔میٹر چھڑ کی کمیت کیا ہے۔

7.18 ایک ٹھوس گولا دو مختلف مائل سطح سے برابر اونچائی مگر مختلف جھکاؤ زاویہ سے نیچے کی طرف لڑھک رہا ہے (a) کیا ہر حالت میں یہ

دونوں ایک ہی رفتار سے نیچے پہونچے گی؟ (b) کیا ایک سطح کے مقابلہ میں دوسرے سطح پر پہنچنے کی جانب لڑھکنے میں زیادہ وقت لگے گا؟ (c) اگر ایسا ہے، تو کون سا اور کیوں؟

7.19 ایک 2 m نصف قطر والے گولائی کا وزن 100 kg ہے۔ یہ افقی سطح کے سمت میں اس طرح لڑھکتا ہے کہ اس کی مرکز کمیت کی چال 20cm/s ہے۔ اسے روکنے کے لیے کتنے کام کی ضرورت ہوگی؟

7.20 آکسیجن سالمہ کی کمیت 5.30×10^{-26} ہے اور اس کا جمود گردشہ ایک محور کے گرد جو مرکز سے گذرتا ہے اور دو جوہروں کو ملانے والی لائن کے عمود میں ہے وہ 1.94×10^{-46} ہے۔ مان لیجیے کہ اس سالمہ کی اوسط چال گیس میں 500 m/s ہے اور اسکی گردشی حرکی توانائی خطی توانائی کے دوتہائی ہے۔ سالمہ کی اوسط زاویائی رفتار معلوم کریں۔

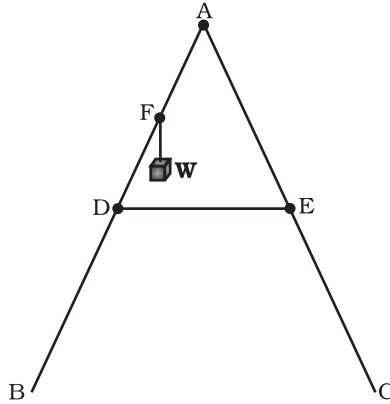
7.21 ایک ٹھوس سلنڈر مائل مستوری پر اوپر کی جانب لڑھک رہا ہے جس کا جھکاؤ زاویہ 30^0 ہے۔ مائل مستوی کے بالکل نیچے سلنڈر کی مرکز کمیت کی چال 5 m/s ہے۔

(a) سلنڈر مستوی پر کتنی دور اوپر جائے گا؟

(b) نیچے آنے میں کتنا وقت لگے گا؟

اضافی مشقیں

7.22 جیسا کہ شکل 7.40 میں دکھایا گیا ہے سیڑھی نما کے دونوں کنارے BA اور CA 1.6 میٹر لمبی ہے اور نقطہ A پر پن ہے۔ ایک رسّی DE، 0.5 m لمبی درمیان میں بندھی ہوئی ہے۔ 40 kg کا وزن نقطہ F سے لٹکایا گیا ہے جو سیڑھی BA کے سمت میں ہے اور B سے 1.2 m دور ہے۔ سطح کو بغیر رگڑ کا ماننے پر اور سیڑھی کے وزن کو نظر انداز کرنے پر رسّی کے اندر کھینچاؤ اور سطح کے ذریعہ سیڑھی پر لگی قوت معلوم کریں۔ (لیجیے $g = 9.8\ m/s^2$)۔

(اشارہ : سیڑھی کے ہر طرف متوازن حالت مان لیجیے)

شکل 7.40

7.23 ایک آدمی گھماؤ دار پلیٹ فارم پر اپنے بازو کو افقی سمت میں پھیلائے ہوئے کھڑا ہے اور ہر ہاتھ میں 5 kg وزن پکڑے

ہوئے ہے۔ پلیٹ فارم کی زاویائی چال 30 rev/min ہے۔ آدمی اس کے بعد اپنے بازو کو قریب کرتا ہے اس طرح کہ ہر وزن کی دوری محور سے 90 cm سے گھٹ کر 20 cm رہ جاتی ہے آدمی کا جمود گردشہ پلیٹ فارم کے ساتھ ایک مستقل عدد $7.6\ g\ m^2$ ہے۔

(a) اس کی نئی زاویائی چال کیا ہے (رگڑ کو نظر انداز کریں)

(b) کیا اس عمل میں حرکی توانائی کی بقالا گو ہوگا۔ اگر نہیں، تو تبدیلی کہاں سے آتی ہے۔

7.24 بندوق کی ایک گولی جس کی کمیت 10 g اور چال 500 m/s ہے دروازہ پر چھوڑی گئی ہے اور دروازے کے بالکل درمیان میں گھس گئی ہے۔ دروازہ 1 m چوڑی اور وزن 12 kg ہے۔ اس کے ایک کنارہ پر پن لگی ہوئی ہے اور عمودی محور کے گرد بغیر رگڑ کے گھومتی ہے۔ دروازہ کی زاویائی چال ٹھیک گولی کے گھسنے کے بعد کیا ہوگی۔

(اشارہ۔ دروازہ کا جمود گردشہ عمودی محور کے گرد ایک کنارہ پر $ML^2/3$ ہے)

7.25 دو ڈسک جس کا جمود گردشہ بالترتیب اپنے محور کے گرد I_1 اور I_2 ہے (ڈسک سے عمود میں ہے اور مرکز سے گذرتا ہے) اور زاویائی چال ω_1 اور ω_2 سے گھوم رہی ہے۔ اسے قریب اس طرح لایا گیا ہے کہ اس کی گردشی محور آپ میں مل جاتی ہے۔ (a) ان دونوں ڈسک نظام کی زاویائی چال اب کیا ہوگی؟ (b) یہ دکھائیں کہ متحدہ نظام کی حرکی توانائی دونوں ڈسک کے ابتدائی حرکی توانائی کے مجموعہ سے کم ہوگی۔ آپ اس میں توانائی کے نقصان کو اس طرح لیں گے۔ لیجیے

7.26 (a) عمودی محور کے تھیورم کو ثابت کریں

(اشارہ: ایک نقطہ (x,y) کے دوری کا مربع x-y سطح میں ایک محور سے جو منبع سے گذرتا ہے اور x_2+y_2 سطح کے عمود میں ہے)

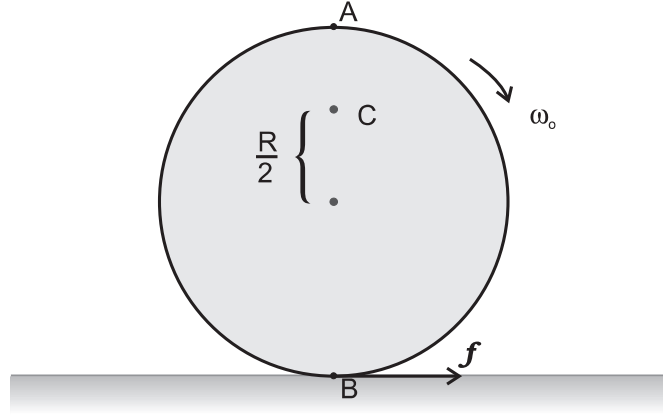
(b) متوازی محور کے تھیورم کو ثابت کریں

(اشارہ: n ذرات کے کسی نظام کا مرکز کمیت اگر منبع منتخب کیا گیا ہے تو $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$)

7.27 لڑھکن جسم کی خطی حرکت کی رفتار v ہے (جسم جیسے رنگ، ڈسک، سلنڈر یا گولا)۔ ثابت کیجیے کہ v مائل مستوی (اونچائی h) کے سب سے نیچے ہوگی

$$v^2 = \frac{2gh}{\left(1 + k^2 / R^2\right)}$$

حری حرکیاتی عمل کے استعمال سے (قوت اور قوت گردشہ کے ماننے پر)۔ یہ خیال رہے کہ k جسم کا ہم شکل محور کے گرد گھوم نصف قطر ہے اور R جسم کا نصف قطر ہے۔ جسم حالت سکون سے سب سے اوپر کی جانب سے شروع ہوتی ہے۔

7.28 اپنے محور ω_0 زاویائی چال کو گردش کرنے والے کسی ڈسک کو دھیرے سے (انتقالی دھکا دیے بغیر) کسی مکمل بے رگڑ میز پر رکھا جاتا ہے۔ ڈسک کا نصف قطر R ہے۔ شکل 7.41 میں دکھائے گئے ڈسکوں کے نقاط A، B اور C پر خطی رفتار کیا ہے؟ کیا یہ ڈسک شکل میں دکھائی سمت میں لڑھکنے کی حرکت کرے گی؟

شکل **7.41**

7.29 واضح کیجیے کہ شکل 7.18 میں دکھائی گئی سمت میں ڈسک کی لڑھکن حرکت کے لیے رگڑ ہونا ضروری کیوں ہے؟

(a) B پر رگڑ قوت کی سمت اور کامل لڑھکن شروع ہونے سے قبل رگڑ قوت گردشہ کی سمت کیا ہے؟

(b) کامل لڑھکن حرکت شروع ہونے کے بعد رگڑ قوت کیا ہے؟

7.30 10 cm نصف قطر کی کوئی ٹھوس ڈسک اور اتنے ہی نصف قطر کا کوئی چھلا کسی افقی میز پر ایک ہی ساعت 10π rad s^{-1} کی زاویائی چال سے رکھا جاتا ہے۔ ان میں سے کون پہلے لڑھکن حرکت شروع کردے گا۔ حرکی رگڑ ضربیہ $\mu_k = 0.2$ ہے۔

7.31 10 kg کمیت اور 15 cm نصف قطر کا کوئی سلنڈر کسی 30^o جھکاؤ کے مستوی پر کامل لڑھکن حرکت کر رہا ہے۔ ساکن رگڑ ضربیہ $m_s = 0.25$ ہے۔

(a) سلنڈر پر کتنی قوت رگڑ عمل پذیر ہے؟

(b) لڑھکن کی مدت میں رگڑ کے خلاف کتنا کام کیا جاتا ہے؟

(c) اگر مستوی کا جھکاؤ θ میں اضافہ کردیا جائے تو θ کی کس قدر پر سلنڈر کامل لڑھکن حرکت کرنے کے بجائے پھسلنا (skid) شروع کردے گا؟

7.32 نیچے دیے گئے ہر ایک بیان کو غور سے پڑھیے اور اسباب کے ساتھ جواب دیجیے کہ ان میں کون سا صحیح ہے اور کون سا غلط۔

(a) لڑھکن حرکت کرتے وقت رگڑ قوت اسی سمت میں عمل پذیر ہوئی ہے جس سمت میں جسم کا سمت مرکز کمیت حرکت کرتا ہے۔

(b) لڑھکن حرکت کرتے وقت نقطۂ لمس کی ساعتی چال صفر ہوتی ہے۔

(c) لڑھکن حرکت کرتے وقت نقطۂ لمس کا اسراع صفر ہوتا ہے۔

(d) کامل لڑھکن حرکت کے لیے رگڑ کے خلاف کیا گیا کام صفر ہوتا ہے۔

(e) کسی کامل بے رگڑ مائل مستوی پر نیچے کی طرف حرکت کرتے پہیے کی حرکت پھسلن حرکت (لڑھکنے کی حرکت نہیں) ہوگی۔

7.33 ذرّات کے نظام کی حرکت کو جدا کرنے پر مرکز کمیت کی حرکت اور مرکز کمیت کے گرد حرکت ملتی ہے۔

(a) دکھائیں کہ $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i' + m_i \mathbf{v}$
جہاں $\mathbf{p}_i$، ith' ذرہ (m_i کمیت) کا تحرک ہے اور $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i' + m_i \mathbf{v}_i'$ ہے۔خیال رہے کہ $\mathbf{v}_i'$، ith' ذرہ کی رفتار مرکز کمیت کے نسبت سے ہے۔
مرکز کمیت کی تعریف کا استعمال کرتے ہوئے یہ بھی ثابت کردیں کہ $\sum \mathbf{p}_i' = 0$

(b) دکھائیں $K = K' + ½MV^2$ ، جہاں K ذرات کے نظام کی حرکی توانائی ہے، 'k نظام کی کل حرکی توانائی ہے جب ذرّات کی رفتار مرکز کمیت کے لحاظ سے لی جاتی ہے اور $Mv^2/2$ پورے نظام کے خطی حرکت کی حرکی توانائی ہے (یعنی نظام کے مرکز کمیت کے حرکت کی)۔اس نتیجہ کو سیکشن 7.14 میں استعمال کیا گیا ہے۔

(c) یہ دکھائیں $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ جہاں $\sum \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$ **L** –**L** مرکز کمیت کے گرد نظام کا زاویائی تحرک ہے۔اسکی رفتار مرکز کمیت کے لحاظ سے لی جاتی ہے۔یہ یادرکھیں $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ ۔باقی سارے علامت اسی باب کے مطابق ہیں۔خیال رہے '**L**اور **MR×V** بالترتیب زاویائی تحرک ذرّات کے نظام کے مرکز کمیت کی اور اسکے گرد ہے۔

دکھائیں $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum \mathbf{r}_i' \times \dfrac{d\mathbf{p}'}{dt}$

آگے دیکھے کہ $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \tau_{ext}'$

جہاں τ_{ext}' مرکز کمیت کے گرد نظام پر لگنے تمام بیرونی قوت گردشہ کا مجموعہ ہے۔

(اشارہ : مرکز کمیت کی تعریف اور حرکت کا تیسرا کلیہ استعمال کریں۔یہ مانیں گے کہ دو ذرّات کے درمیان لگی داخلی قوت ذرّات کو ملانے والی لائن کے سمت میں ہوتی ہے۔)

پلوٹو: ایک بونا سیارہ

چیک جمہوریہ کے پراگ میں 24 اگست 2006 کو منعقد اجرام فلکی کی بین الاقوامی یونین، آئی اے یو کی جنرل اسمبلی میں ہمارے نظام شمسی کے سیاروں کی ایک نئی تشریح پیش کی ہے۔نئی تعریف کے مطابق پلوٹو ایک سیارہ نہیں ہے۔اس کا مطلب ہے کہ نظام شمسی میں اب آٹھ سیارے ہیں جن میں عطارد، زہرہ، زمین، مریخ، مشتری، زحل، یورینس اور نیپچون شامل ہیں۔آئی اے یو نے ہمارے نظام شمسی میں سیارچوں (سیٹلائٹ) کو چھوڑ کر ''سیاروں'' اور دیگر اجرام فلکی کو تین الگ الگ زمروں میں تقسیم کیا ہے۔جو مندرجہ ذیل ہے:

(1) ایک 'سیارہ' ایک ایک ایسا جرم فلکی ہے جو (الف) سورج کے گرد گھومتا ہے (ب) اتنی وسعت رکھتا ہے کہ جو کسی ٹھوس مادے کی قوت پر اپنی کشش کے ذریعہ حاوی ہو کر مائع توازن سے (تقریباً گول) شکل اختیار کر لیتا ہے اور (ج) اپنے مدار کے آس پاس کسی کو داخل نہیں ہونے دیتا۔

(2) ایک 'بونا سیارہ' (Dawrf Planet)، ایک ایسا جرم فلکی ہے جو (الف) سورج کے گرد گھومتا ہے (ب) اتنی وسعت رکھتا ہے جو کسی ٹھوس مادے کی قوت پر اپنی کشش کے ذریعہ حاوی ہو کر مائع کے توازن سے (تقریباً گول) شکل اختیار کر لیتا ہے (ج) اپنے مدار کے آس پاس کسی کے داخلے کو نہیں روک سکتا اور (د) یہ ایک سیارچہ نہیں۔

(3) سیارچوں کو چھوڑ کر دیگر تمام اجرام، جو سورج کے گرد گھوم رہے ہیں، کو مجموعی طور پر ''نظام شمسی کے چھوٹے اجرام'' کہا جانا چاہیے۔نظام شمسی کے دیگر آٹھ سیاروں کے برخلاف پلوٹو کے مدار میں ''دیگر اجرام'' اور نیپچون سیارہ بھی آجاتا ہے۔فی الحال ''دیگر اجرام'' میں زیادہ تر نظام شمسی کے گرد گھومنے والے بہت چھوٹے سیارے نیپچون سے گزرنے والے اجرام (TNOs) شہاب ثاقب اور دیگر چھوٹے اجرام شامل ہیں۔

مذکورہ بالا تعریف کے مطابق پلوٹو ایک ''بونا سیارہ'' ہے اور اسے نیپچون سے گذرنے والے اجرام کے نئے زمرے کے ابتدائی جرم کے طور پر تسلیم کیا گیا ہے۔